Corrigé
TD complexes 2

Exercice 1
(3872)

Les racines n-ièmes de l'unité sont les complexes ω^k, avec $k = 0, \dots, n-1$. Leur produit vaut donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \omega^{n(n-1)/2} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

(résultat qu'on vérifie facilement pour $n = 1, 2, 3, 4$).

On a ici une somme géométrique de raison ω^p. Si p est un multiple de n, la raison est donc égale à 1, et la somme fait n. Sinon, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega} = 0$$

puisque $\omega^n = 1$.

On développe la puissance à l'intérieur de la somme en utilisant la formule du binôme de Newton, et on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \omega^{kj} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}. \end{aligned}$$

On utilise le résultat de la question précédente, qui nous dit que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ sera non-nulle si et seulement si $p = 0$ ou n, auquel la cas la somme fait n. Puisque $n + n = 2n$, on obtient le résultat attendu.

Exercice 2
(3892)

$z = 5$ n'est pas solution et l'équation est équivalente à $|z-3| = |z-5|$. Autrement dit, le point M d'affixe z est à égale distance du point A d'affixe 3 et du point B d'affixe 5. L'ensemble des points recherché est donc la médiatrice de $[AB]$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{|z-3|}{|z-5|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad &\iff \quad |z-3|^2 = \frac{1}{2}|z-5|^2 \\ &\iff \quad (z-3)\overline{(z-3)} = \frac{1}{2}(z-5)\overline{(z-5)} \\ &\iff \quad z\bar{z} - (z+\bar{z}) = 7 \\ &\iff \quad |z-1|^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2. \end{aligned}$$

M décrit donc le cercle de centre le point $A(1,0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

Factorisons par $1+i$ dans le module. On trouve :

$$|1+i| \left| z - \frac{2i}{1+i} \right| = 2.$$

Puisque $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\dfrac{2i}{1+i}=1+i$, ceci est équivalent à

$$\big|z-(1+i)\big|=\sqrt{2}.$$

Ainsi, l'ensemble des points M correspondants est le cercle de centre le point $A(1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 3
(3893)

On écrit $\frac{1}{i}z=e^{-i\pi/2}z$, et on remarque que l'on a affaire à une rotation d'angle $-\pi/2$.

On a ici l'écriture d'une translation de vecteur $(2,1)$.

L'application de la forme $z\mapsto az+b$ est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant $z=(1+i\sqrt{3})z+\sqrt{3}(1-i)$. On trouve $z=1+i$, le centre de la similitude est donc le point $A(1,1)$. On a de plus

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\pi/3}.$$

Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\pi/3$.

Si $\alpha=0$, la transformation est simplement l'identité. Sinon, on a affaire à une similitude directe. Son point invariant est le nombre complexe z solution de l'équation

$$z=(1+i\tan\alpha)z-i\tan\alpha\iff z=1.$$

Le centre de la similitude est donc le point $A(1,0)$. De plus, on a

$$1+i\tan\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}\times(\cos\alpha+i\sin\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}e^{i\alpha}.$$

Ainsi, la similitude est de rapport $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ et d'angle α.

Exercice 4
(3894)

On va commencer par donner l'écriture complexe de la transformation. On a ainsi

$$S(z)=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}z.$$

Autrement dit, si on note z_n l'affixe du point A_n, on a

$$z_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}z_n.$$

On reconnait une suite géométrique (de raison $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}$ qui est un nombre complexe !). Par les théorèmes que l'on connait, on en déduit que

$$z_n=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\pi/6}\right)^n z_0=\frac{3^{n/2}}{2^n}e^{in\pi/6}z_0.$$

En particulier, $z_{12} = \dfrac{3^6}{2^{12}} e^{i2\pi} 6 = \dfrac{3^7}{2^{11}}$. Le point A_{12} est bien situé sur la demi-droite $(O, \vec{i})$.

Le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ est d'affixe z_n, le vecteur $\overrightarrow{OA_{n+1}}$ est d'affixe $z_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} z_n$, et le vecteur $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ est d'affixe $z_{n+1} - z_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} - 1 \right) z_n$. Pour démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}, on peut utiliser la réciproque du théorème de Pythagore. Or,

$$OA_n^2 = |z_n|^2,$$

$$OA_{n+1}^2 = \frac{3}{4}|z_n|^2,$$

et

$$\frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\pi/6} - 1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4},$$

ce qui donne

$$A_nA_{n+1}^2 = \frac{1}{4}|z_n|^2.$$

On a bien

$$OA_n^2 = OA_{n+1}^2 + A_nA_{n+1}^2.$$

Une autre méthode possible est de vérifier que $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_n}$ est un imaginaire pur, ce qui prouve l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ et $\overrightarrow{OA_{n+1}}$.

On sait que $OA_0 = 6$ et que $OA_1 = 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Par le théorème de Pythagore,

$$A_0A_1 = 6\sqrt{1^2 - \frac{3}{4}} = 3.$$

Notons alors d_n la longueur du segment $[A_nA_{n+1}]$, de sorte que $d_0 = 3$. Puisqu'une similitude de rapport r multiplie les longueurs par r, on a

$$d_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} d_n.$$

La quantité recherchée est $d_0 + \cdots + d_{11}$. Par la formule de la somme d'une suite géométrique, on trouve

$$d_0 + \cdots + d_{11} = 3\frac{1 - \frac{3^6}{2^{12}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Exercice 5
(3895)

On sait que les points I, M et M' sont alignés si et seulement si

$$(\vec{IM}, \vec{IM'}) = 0[\pi] \text{ ou } M = I \text{ ou } M' = I \text{ ou } M = M'.$$

En termes de nombres complexes, ceci se traduit par

$$\arg\left(\frac{iz - i}{z - i}\right) = 0\ [\pi] \text{ ou } z = i \text{ ou } iz = i \text{ ou } iz = z.$$

Introduisons le point A d'affixe 1. Alors, ceci devient

$$\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0\ [\pi] \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A \text{ ou } M=O$$

$$\iff (\vec{IM},\vec{AM})=-\frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A \text{ ou } M=O$$

$$\iff (IM)\perp(AM) \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A \text{ ou } M=O.$$

Les points M solutions sont donc les points du cercle de diamètre $[AI]$ (O étant également un point de ce cercle). Puisque M' est image de M par rotation de centre O et d'angle $\pi/2$, les points M' correspondants sont sur l'image de ce cercle par cette rotation.

Notons A d'affixe 1 et I d'affixe i. La question s'écrit encore

$$\frac{z-1}{z-i}=ia, \text{ avec } a\in\mathbb{R},$$

c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux. Autrement dit, la condition est vérifiée si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AI]$, excepté I (on doit avoir $z\neq i$ pour définir le quotient).

On va d'abord supposer que $z\neq 0,1,-1$ pour que les trois points M,P,Q soient distincts et qu'on soit sûr d'avoir affaire à un vrai triangle. On va utiliser la condition suivante : soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$. Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si

$$\exists m\in\mathbb{R},\ \frac{c-a}{b-a}=mi \iff \Re e\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=0.$$

On distingue alors trois cas :

le triangle est rectangle en M. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z^3-z}{z^2-z}\right)=0 \iff \Re e(z+1)=0 \iff \Re e(z)=-1.$$

Les points M solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x=-1$.

le triangle est rectangle en P. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z^3-z^2}{z-z^2}\right)=0 \iff \Re e(z)=0.$$

Les points M solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x=0$.

le triangle est rectangle en Q. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z-z^3}{z^2-z^3}\right)=0 \iff \Re e\left(\frac{z+1}{z}\right)=0.$$

Notons D d'affixe -1 et O d'affixe 0. On obtient que les droites (DM) et (OM) sont orthogonales, c'est-à-dire que M décrit le cercle de diamètre $[OD]$.

Exercice 6

(3897)

Posons $a=e^{i\theta}$. Alors les racines de $z^n=1$ sont données par $z_k=e^{(2ik\pi+\theta)/n}$, $k=0,\dots,n-1$. Factorisant par l'angle moitié et utilisant les formules d'Euler, on a

$$1+z_k=2\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right)e^{i(2k\pi+\theta)/2n}$$

soit

$$(1+z_k)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) e^{i(2k\pi+\theta)/2} = 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi+\theta}{2n}\right) e^{i(k\pi+\theta/2)}.$$

Tous les points d'affixe $(1+z_k)^n$ sont donc situés sur la droite qui fait un angle $\theta/2$ avec l'axe des abscisses. Ainsi, ils sont alignés.

Exercice 7
(3898)

On commence par étudier les cas où deux de ces points sont confondus. L'équation $z = z^2$ a pour solution $z = 1$ et $z = 0$. L'équation $z = z^4$ a pour solutions $z = 0$ et $z = 1, j, j^2$. L'équation $z^2 = z^4$ a pour solutions $z = 0, i, -i$. On suppose désormais que z est différent des nombres précédemment trouvés, et on remarque que les points sont alignés si et seulement si

$$\arg\left(\frac{z^4-z}{z^2-z}\right) = 0\ [\pi] \iff \frac{z^4-z}{z^2-z} \in \mathbb{R}.$$

Or, en notant $z = x+iy$, on a

$$\frac{z^4-z}{z^2-z} = \frac{z(z-1)(z^2+z+1)}{z(z-1)} = z^2+z+1 = (x^2-y^2+x+1)+iy(2x+1).$$

Ainsi, on en déduit que, dans ce cas, les points z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si $y = 0$ ou $x = -1/2$, c'est-à-dire si et seulement si z est réel ou sa partie réelle vaut $-1/2$.

Exercice 8
(3900)

Le triangle est équilatéral si et seulement si

$$z_3 - z_1 = e^{i\pi/3}(z_2-z_1) \text{ ou } z_3 - z_1 = e^{-i\pi/3}(z_2-z_1),$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$z_3 - (1+e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3} = 0 \text{ ou } z_3 - (1+e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3} = 0.$$

Ceci est encore équivalent à dire que le produit de ces deux quantités est nul, c'est-à-dire à

$$(z_3 - (1+e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3}z_2)(z_3 - (1+e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3}z_2) = 0.$$

En développant ce produit, on trouve exactement la condition demandée.