

TD fonctions usuelles 2

Exercice 1

(512)

Montrer que pour tout $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}$$

Exercice 2

(517)

Résoudre le système

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ e^a + e^b + e^c = 3 \end{cases}$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$

Exercice 3

(518)

Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \frac{1}{x} \ln x^{1/x}$.

Exercice 4

(519)

Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

1. $(a^b)^c = a^{bc}$

2. $a^b a^c = a^{bc}$

3. $a^{2b} = (a^b)^2$

4. $(ab)^c = a^{c/2} b^{c/2}$

5. $(a^b)^c = a^{(b^c)}$

6. $(a^b)^c = (a^c)^b$?

Exercice 5

(520)

Comparer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x$$

Exercice 6

(521)

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sqrt{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}$

Exercice 7

(522)

Résoudre les équations suivantes :

1. $e^x + e^{1-x} = e + 1$

2. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

3. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Exercice 8

(523)

Résoudre les systèmes suivants :

1.
$$\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} e^x e^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Exercice 9

(533)

Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$

2. $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$

3. $\sin x + \sin 3x = 0$

4. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

5. $3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{6}$

6. $2 \sin x \cdot \cos x + \sqrt{3} \cos 2x = 0$

Exercice 10

(539)

Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\arctan(p+1) - \arctan(p)$$

Étudier la limite de la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{p=0}^n \arctan \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

Exercice 11

(541)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2 \arccos x)$

2. $\cos(2 \arcsin x)$

3. $\sin(2 \arccos x)$

4. $\cos(2 \arctan x)$

5. $\sin(2 \arctan x)$

6. $\tan(2 \arcsin x)$