Corrigé
TD fonctions usuelles 2

Exercice 1
(512)
On a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\ln a+\ln b\right)=\ln\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

or

$a+b=\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2\geq 2\sqrt{ab}$ donc
$\ln\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\geq 0$

Exercice 2
(517)
Il est clair que le triplet nul est solution de ce système. Inversement, soit (a,b,c) solution. Posons $x=\mathrm{e}^a$, $y=\mathrm{e}^b$ de sorte que

$$\mathrm{e}^c=\mathrm{e}^{-(a+b)}=1/xy.$$

On a donc $x,y>0$ et
$x+y+\frac{1}{xy}=3$ Pour $y>0$ fixé, étudions la fonction $f:x\mapsto x+y+1/xy$. Cette fonction est dérivable et admet un minimum strict en $x=1/\sqrt{y}$ valant $g(y)=y+2/\sqrt{y}$. La fonction g est dérivable et admet un minimum strict en $y=1$ valant $g(1)=3$. On en déduit que si $(x,y)\neq(1,1)$ alors $f(x,y)>3$ et donc
$f(x,y)=3\langle 10233\rangle x=y=1$ On peut alors conclure $a=b=c=0$.

Exercice 3
(518)

$$\left(\exp x^2\right)^{\frac{\ln x^{1/x}}{x}}=x$$

.

Exercice 4
(519)
(a) c) f)

Exercice 5
(520)
Quand $x\to 0^+$

$$x^{(x^x)}=\exp\left(x^x\ln x\right)=\exp\left(\exp\left(x\ln x\right)\ln x\right)\to 0$$

et

$$\left(x^x\right)^x=\exp\left(x\ln x^x\right)=\exp\left(x^2\ln x\right)\to 1$$

Exercice 6

(521)

(a) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$ (b) $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} = 1$ (c) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$.

Exercice 7

(522)

(a) $\mathcal{S} = \{0,1\}$ (b) $\mathcal{S} = \{0,1,4\}$ (c) Obtenir $2^{2x-3} = 3^{x-3/2}$ puis $\mathcal{S} = \{3\langle 8739\rangle 2\}$.

Exercice 8

(523)

(a) $x = 1/2, y = \sqrt{2}/5$ (b) Obtenir un système somme/produit en x et $2y$ puis le résoudre.

Exercice 9

(533)

(a) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos\left(2x - \pi/3\right) = \cos\left(x + \pi/4\right)$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \text{ et } x = \frac{\pi}{36}\ [\frac{2\pi}{3}]$$

(b) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos^4 x + \sin^4 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2$$

soit encore $2\cos^2 x \sin^2 x = 0$ On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2]$$

(c) L'équation étudiée équivaut à $2\sin 2x \cos x = 0$ On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2]$$

(d) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sin\left(2x\right)\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2], x = \frac{2\pi}{3}[2\pi] \text{ et } x = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$$

(e) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) = \sqrt{6}$$

soit encore

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

On obtient pour solutions

$$x = \frac{\pi}{12}\ [2\pi] \text{ et } x = -\frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$$

(f) L'équation étudiée équivaut à

$$2\left(\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) = 0$$

soit encore $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$ On obtient pour solutions

$$x=\frac{\pi}{3}\ [\pi] \text{ et } x=-\frac{\pi}{6}\ [\pi]$$

Exercice 10
(539)
Posons

$$\theta=\arctan(p+1)-\arctan(p).$$

Comme

$$0\leq\arctan p\leq\arctan(p+1)<\pi/2$$

on a $\theta\in[0;\pi/2[$. De plus $\tan\theta=\dfrac{1}{p^2+p+1}$ donc
$\theta=\arctan\dfrac{1}{p^2+p+1}$ Par télescopage

$$S_n=\sum_{p=0}^{n}\arctan\frac{1}{p^2+p+1}=\arctan(n+1)\to\pi/2.$$

Exercice 11
(541)
(a)

$$\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1.$$

(b)

$$\cos(2\arcsin x)=1-2\sin^2\arcsin x=1-2x^2.$$

(c)

$$\sin(2\arccos x)=2x\sqrt{1-x^2}$$

(d)

$$\cos(2\arctan x)=2\cos^2\arctan x-1=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

(e)

$$\sin(2\arctan x)=2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x)=\frac{2x}{1+x^2}.$$

(f)

$$\tan(2\arcsin x)=\frac{2\tan(\arcsin x)}{1-\tan^2(\arcsin x)}=\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}.$$