DM4

Exercice 1

Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$$

On sera attentif à réduire son domaine d'étude par parité, périodicité, etc. Ne pas oublier d'effectuer le tracé proprement.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

(attention au domaine de définition et à l'expression des fonctions puissances)

Problème

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Q1. Donner sans démonstration les limites suivantes :

$$i) \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} \qquad ii) \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$$

Q2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

Q3. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q4. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ (attention aux erreurs de calcul).

Q5.Étudier rapidement la fonction $h : x \mapsto e^x.g'(x)$ pour en déterminer le signe.

Q6. Dresser le tableau complet des variations de g.

Q7. Écrire l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

Q8. La phrase suivante est-elle vraie ou fausse :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in \mathbb{R}, g(x_n) = \frac{1}{n}$$

(on rappelle que $\exists! x$ signifie « il existe un unique x »)
Apporter une modification minime pour que la phrase devienne vraie (on justifiera).