DM4 corrigé

Exercice 1

Il y a deux façons de faire, selon que l'on voit une ruse ou pas. Commençons sans voir la ruse :
1. Domaine de définition : soit $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant 1+\sin x \leqslant 2$ donc la racine ne pose pas de problème, on a de plus $0 \leqslant \frac{1+\sin x}{2} \leqslant 1$, et donc $0 \leqslant \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} \leqslant 1$, or la fonction arccos est définie sur $[-1,1]$, donc $f(a)$ est bien définie : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$.
La fonction $x \mapsto 1+\sin x$ n'a pas de parité, mais par contre est périodique de période 2π donc f l'est aussi. On va donc réduire son intervalle d'étude à $[0, 2\pi]$.
2. Variations et dérivée : arccos est dérivable sur $]-1,1[$ donc on va se restreindre aux $x \in [0,2\pi]$ tels que $\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}} \neq \pm 1$, i.e. $\frac{1+\sin x}{2} \neq 1$, donc $\sin x \neq 1$, donc $x \neq \frac{\pi}{2}$. De plus la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, donc on se restreint à $\sin x \neq -1$, i.e. $x \neq \frac{3\pi}{2}$.
Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable sur } [0,2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}}$ comme composée de fonctions dérivables.

Pour calculer sa dérivée, posons $u = \arccos$, $v(x) = \sqrt{x}$ et $w(x) = \frac{1+\sin x}{2}$, on a donc $f = u \circ (v \circ w)$ d'où

$$\begin{aligned} f' &= (v \circ w)'(u' \circ (v \circ w)) && (1)\\ &= w'(v' \circ w)(u' \circ (v \circ w)) && (2)\\ & && (3) \end{aligned}$$

donc pour $x \in [0,2\pi] - \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$,

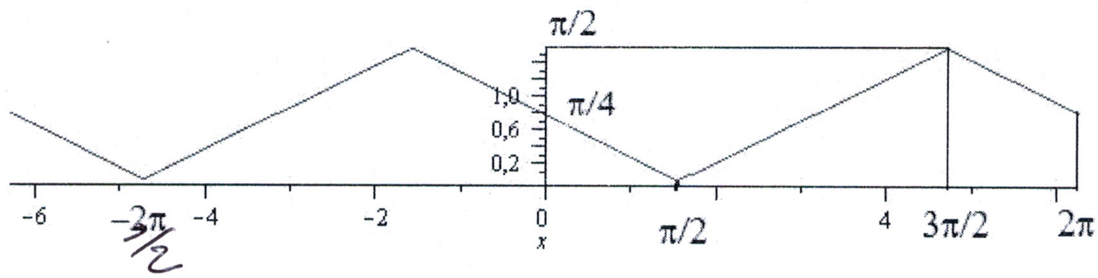
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x}{2} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}} \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\right)^2}} && (4)\\ &= \frac{-\cos x}{4\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\sqrt{\frac{1-\sin x}{2}}} = \frac{-\cos x}{4\sqrt{\frac{1-\sin^2 x}{4}}} && (5)\\ &= \frac{-\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{-\cos x}{2\sqrt{\cos^2 x}} && (6)\\ &= -\frac{\cos x}{2|\cos x|} && (7) \end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{3\pi}{2}, 2\pi],\ f'(x) = -\frac{1}{2} \text{ et si } x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[,\ f'(x) = \frac{1}{2}}$: f' est constante par morceaux donc f est linéaire par morceaux.

3. Tableau de variations :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$-$	non.def.	$+$	non.def.	$-$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}$

4. Courbe de f :



Maintenant, rusons : on a $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}\right) - 1$ donc

$$f(x) = \arccos\sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \arccos\left|\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right|$$

f est périodique de période 2π, on peut choisir un intervalle d'étude de la forme $[a, a+2\pi]$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \geqslant 0$ si $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, i.e. $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$: on étudie donc f sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ et on a alors

$$f(x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)$$

Or si $x \in [0, \pi]$, $\arccos(\cos x) = x$ et si $x \in [-\pi, 0]$, $\arccos(\cos x) = -x$: f est alors linéaire par morceaux, sur les intervalles trouvés précédemment :
si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$,
si $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}$.

Exercice 2

par définition des fonctions puissances on a $x^{x^{\frac{1}{2}}} = e^{e^{\frac{1}{2}\ln x}\ln x}$, donc on prendra $x \in]0, +\infty[$.
On a alors $x^{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}\ln x}\ln x = -\ln 2$, ce qui n'est pas immédiat à résoudre : on va étudier les variations de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln x}\ln x$$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car composée de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2x}e^{\frac{1}{2}\ln x}\ln x + \frac{e^{\frac{1}{2}\ln x}}{x} \\ &= \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right)\frac{e^{\frac{1}{2}\ln x}}{x} \end{aligned}$$

donc $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$. Posons $\alpha = e^{-2}$, on a $x \in]0, \alpha[\Rightarrow f'(x) < 0$, et $x \in]\alpha, +\infty[\Rightarrow f'(x) > 0$, f est donc strictement décroissante de 0 exclus jusqu'à α puis strictement croissante ensuite.

On a $f(\alpha) = -2e^{-1} < -\ln 2$ par étude de la fonction $x \mapsto -xe^{-1} + \ln x$.
Limite en 0 :
on a $f(x) = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0 > -\ln 2$ par croissance comparée, puisque $\sqrt{x} \to 0$.
Limite en $+\infty$:
de même, on voit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires sur $]0, \alpha[$, il existe un unique réel x_1 tel que $f(x_1) = -\ln 2$. De même, par le théorème des valeurs intermédiaires sur $]\alpha, +\infty[$, il existe un unique réel x_2 tel que $f(x_2) = -\ln 2$. Sonc, en posant $\alpha = e^{-\frac{1}{2}}$, l'équation $f(x) = -\ln 2$ admet exactement deux solutions réelles $x_1 \in]0, \alpha[$ et $x_2 \in]\alpha, +\infty[$.
Or on remarque que $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{16}$ sont solutions, ce sont donc les seules :

$$\boxed{\text{L'équation } x^{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \text{ admet exactement deux solutions réelles : } \frac{1}{4} \text{ et } \frac{1}{16}.}$$

Problème. Fonctions $\ln$ et $\exp$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Q7. Donner sans démonstration les limites suivantes :

$$i)\ \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} \qquad\qquad ii)\ \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$$

Corrigé :

i) $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0}$

ii) $\boxed{\lim\limits_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1}$ (étudier la dérivée de $x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0)

Avec les notations précédentes , comme u ne s'annule pas , $x \longmapsto \dfrac{e^x}{u(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\ h'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} - \dfrac{e^x}{1+e^x} = -\dfrac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$

Ainsi $h' < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$

- $\forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \dfrac{0}{1} - \ln 1 = 0}$
- Ainsi : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ h(x) < 0}$

Q12. Dresser le tableau complet des variations de g.

Corrigé :

Puisque : $\forall x \in \mathbb{R}\ g'(x) = e^{-x}.h(x)$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}\ g'(x) < 0$

donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$

D'où le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	1	$\searrow$	0

Q13. Écrire l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

Corrigé :

L'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = g'(0)(x-0)+g(0)$ avec $g'(0) = \dfrac{1}{2} - \ln(2)$ et $g(0) = \ln 2$

Donc $\boxed{(T) : y = \left(\dfrac{1}{2} - \ln(2)\right) x + \ln 2}$

Q14. La phrase suivante est-elle vraie ou fausse :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in \mathbb{R}, g(x_n) = \frac{1}{n}$$

(on rappelle que $\exists! x$ signifie « il existe un unique x »)

Apporter une modification minime pour que la phrase devienne vraie (on justifiera).

Corrigé :

La phrase suivante " $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \exists! x_n \in \mathbb{R}\ g(x_n) = \dfrac{1}{n}$ " est fausse car , pour $n = 1$, $g(x) = \dfrac{1}{1} = 1$ n'admet aucune solution

Q8. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
Que peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

Corrigé :

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = e^{-x}.\ln(1+e^x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ avec $t = e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1}$

$\boxed{\text{La droite horizontale d'équation } y = 1 \text{ est asymptote à la courbe } (C) \text{ en } -\infty}$

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = e^{-x}.\ln(1+e^x) = \dfrac{\ln(1+e^x)}{1+e^x} \times \dfrac{1+e^x}{e^x}$

avec $t = 1 + e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{1+e^x}{e^x} = e^{-x} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0}$

$\boxed{\text{La droite horizontale d'équation } y = 0 \text{ est asymptote à la courbe } (C) \text{ en } -\infty}$

Q9. Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

$u : x \longmapsto 1 + e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$; ln est dérivable sur $\mathbb{R}$
donc $\ln u : x \longmapsto \ln(1+e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
Comme $w : x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en résulte que $\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

Q10. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ (attention aux erreurs de calcul).

Corrigé :

Pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = -e^{-x}.\ln(1+e^x) + e^{-x} \times \dfrac{e^x}{1+e^x}$

Donc : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ g'(x) = \dfrac{1}{e^x+1} - e^{-x}.\ln(1+e^x)}$

Q11. Étudier rapidement la fonction $h : x \mapsto e^x.g'(x)$ pour en déterminer le signe.

Corrigé :

• On a : $\forall x \in \mathbb{R}\ h(x) = e^x.g'(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln(1+e^x)$

La phrase suivante $\boxed{\text{" } \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}\ \exists! x_n \in \mathbb{R}\ g(x_n) = \dfrac{1}{n} \text{ "}}$ est vraie

car g étant continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $g(\mathbb{R}) =]0, 1[$ et pour $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $\dfrac{1}{n} \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right] \subset]0, 1[$