DS 2 Corrigé

Exercice 1

Q1 $\cos^3 x \sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \dfrac{1}{2^5}\dfrac{1}{i^2}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-2\underbrace{e^{ix}e^{-ix}}_{1}+e^{-2ix}\right)$

$$= \frac{-1}{2^5}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2^5}\left(\cancel{e^{5ix}}\cancel{-2e^{3ix}}\cancel{+e^{ix}}\cancel{+3e^{3ix}}\cancel{-6e^{ix}}\cancel{+3e^{-ix}}\cancel{+3e^{ix}}\cancel{-6e^{-ix}}\cancel{+3e^{-3ix}}\cancel{+e^{-ix}}\cancel{-2e^{-3ix}}\cancel{+e^{-5ix}}\right)$$

$$= \frac{-1}{2^5}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}+e^{3ix}+e^{-3ix}-2e^{ix}-2e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{2^5}\left(2\cos 5x+2\cos 3x-4\cos x\right)$$

$$= \boxed{-\frac{1}{16}\cos 5x-\frac{1}{16}\cos 3x+\frac{1}{8}\cos x}$$

Exercice 3

Q1

On remarque que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ donc :

$\cos(\dfrac{\pi}{12}) = \cos(\dfrac{\pi}{3})\cos(\dfrac{\pi}{4}) + \sin(\dfrac{\pi}{3})\sin(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\boxed{\cos(\dfrac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

et $\sin(\dfrac{\pi}{12}) = \sin(\dfrac{\pi}{3})\cos(\dfrac{\pi}{4}) - \cos(\dfrac{\pi}{3})\sin(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

donc $\boxed{\sin(\dfrac{\pi}{12}) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

Q2 $\sqrt{3}-i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = \boxed{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ $\quad 1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \boxed{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

Q3

Soit $A = (\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i})^{125}$

On a : $\sqrt{3}-i = 2\exp(\dfrac{-i\pi}{6})$ et $1-i = \sqrt{2}\exp(\dfrac{-i\pi}{4})$

donc $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \sqrt{2}\exp(\dfrac{-i\pi}{6}+\dfrac{i\pi}{4}) = \sqrt{2}\exp(\dfrac{i\pi}{12})$

Donc $A = (\sqrt{2})^{125}\exp(\dfrac{125i\pi}{12}) = (\sqrt{2})^{125}\exp(10i\pi + \dfrac{5i\pi}{12})$

$= 2^{62}\sqrt{2}\exp(\dfrac{5i\pi}{12}) = 2^{62}\sqrt{2}\exp(\dfrac{i\pi}{2} - \dfrac{i\pi}{12})$

Donc $\mathrm{Re}\,(A) = 2^{62}\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{12}) = 2^{62}\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 2^{61}(\sqrt{3}-1)$

et $\mathrm{Im}\,(A) = 2^{62}\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{12}) = 2^{62}\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = 2^{61}(\sqrt{3}+1)$

Donc $\boxed{A = (\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i})^{125} = 2^{61}(\sqrt{3}-1) + 2^{61}(\sqrt{3}+1)i}$

Exercice 2

Q1) $1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

Q2) d'où $(1+i\sqrt{3})^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n = \boxed{2^n e^{in\frac{\pi}{3}}} = \boxed{2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

Formule admise : sa démonstration :

si $n=2p$, $p\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{r=0}^{2p} a_r = (a_0+a_2+a_{2p}) + (a_1+a_3+\dots+a_{2p-1}) = \sum_{k=0}^{p} a_{2k} + \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k+1}$$

or $2k\le n \Leftrightarrow 2k\le 2p \Leftrightarrow k\le p$

$2k+1\le n \Leftrightarrow 2k+1\le 2p \Leftrightarrow 2k\le 2p-1$

$\Leftrightarrow 2k\le 2p-2 \Leftrightarrow k\le p-1$

d'où le résultat.

On procède de même pour n impair.

Q3) on a $(1+i\sqrt{3})^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(i\sqrt{3})^r$

$$= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\2k\le n}}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}i^{2k} + \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\2k+1\le n}}\binom{n}{2k+1}\sqrt{3}^{2k+1}i^{2k+1} \quad \text{par } \underline{Q7}$$

$$= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\2k\le n}}\binom{n}{2k}3^k(-1)^k + i\sqrt{3}\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\2k+1\le n}}\binom{n}{2k+1}3^k(-1)^k$$

$= \underline{P_n+\sqrt{3}\,i\,I_n}$ or P_n et $I_n\in\mathbb{R}$,

donc, par Q6, $\boxed{P_n = 2^n\cos\frac{n\pi}{3},\ I_n=\frac{2^n}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}}$

Q4) on a $P_n=0 \Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{3}=0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow n=\frac{3}{2}+3k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n=\frac{3+6k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ or $3+6k$ est impair

donc $n\notin\mathbb{N}$, donc $\boxed{P_n \text{ ne s'annule jamais}}$

on a $I_n=0 \Leftrightarrow \sin\frac{n\pi}{3}=0 \Leftrightarrow n\frac{\pi}{3}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow n=3k,\ k\in\mathbb{Z}$

donc $\boxed{I_n=0 \Leftrightarrow n\in 3\mathbb{Z} \Leftrightarrow n \text{ est un multiple de } 3}$

Exercice 4

Q1) **1** on a $\ln(x^2-1)-\ln(2x-1)+\ln 2=f(x)$ défini ssi $\begin{cases} x^2-1>0 \\ 2x-1>0 \end{cases}$

i.e. $\begin{cases} x^2>1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases}$ donc $x>1$.

On a alors $f(x)=0 \iff e^{\ln(x^2-1)-\ln(2x-1)+\ln 2}=e^0$

$\iff e^{\ln(x^2-1)}\times e^{-\ln(2x-1)}\times e^{\ln 2}=1$

$\iff (x^2-1)\times\frac{1}{2x-1}\times 2=1$

$\iff \frac{x^2-1}{2x-1}=\frac{1}{2} \iff x^2-1=x-\frac{1}{2}$

$\iff x^2-x-\frac{1}{2}=0 \iff 2x^2-2x-1=0$

on a $\Delta=4+4\times 2=12$ donc $x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

or $x>1$, $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ et $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}<0$

donc finalement, la seule solution à l'équation $f(x)=0$ est $\boxed{x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}$

---

2) posons $X=e^x$ alors $e^{2x}-e^x-6=0 \iff X^2-X-6=0$

on a $\Delta=1+4\times 6=25$ d'où $X=\frac{1\pm 5}{2}=3$ ou -2

or $X=e^x>0$ donc $X=3$ et $x=\ln X=\ln 3$

ainsi la seule solution de l'équation est $\boxed{x=\ln 3}$

Q2) **1** soit $A=x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}=e^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\times\ln x}$ par définition des puissances réelles.

ainsi on doit avoir $\begin{cases} x>0 \text{ pour définir } \ln x, \\ \ln x>0 \text{ — " — } \ln(\ln x) \text{ et } \frac{1}{\ln x} \end{cases}$

d'où $x>0$ et $x>1$, i.e. $x>1$, on a donc $\boxed{D=]1,+\infty[}$

Si $x\in D$, on a alors $A=e^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}\times\ln x}=e^{\ln(\ln x)}=\boxed{\ln x}$

2 soit $B = \log_x\left(\log_x\left(x^{(x^y)}\right)\right)$

$= \dfrac{1}{\ln x} \ln\left[\dfrac{1}{\ln x} \ln\left(e^{\left(e^{y \ln x}\right) \times \ln x}\right)\right]$ par définition de $\log_x$ et des puissances réelles.

ainsi on doit avoir $x > 0$ pour définir $\ln x$,

$\ln x \neq 0$ —— $\dfrac{1}{\ln x}$

alors on a $\dfrac{1}{\ln x} \ln\left(e^{\left(e^{y \ln x}\right) \ln x}\right) = \dfrac{1}{\ln x} e^{y \ln x} \times \ln x = e^{y \ln x} > 0$

donc $\boxed{D =]0, 1[\cup]1, +\infty[}$

et si $x \in D$ on a alors $B = \dfrac{1}{\ln x} \ln\left(e^{y \ln x}\right) = \dfrac{1}{\ln x} y \ln x$

donc $B = \boxed{\log_x\left(\log_x\left(x^{(x^y)}\right)\right) = y}$

Q 3 1 on a une forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$

e^x domine : on a $\ln x - e^x = e^x\left(\dfrac{\ln x}{e^x} - 1\right)$

$= e^x\left(\dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^x} - 1\right)$

or $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ et $\dfrac{x}{e^x} \to 0$ quand $x \to +\infty$

(par croissance comparée)

donc $\dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{x}{e^x} - 1 \to -1$ or $e^x \to +\infty$

et donc $\boxed{\ln x - e^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty}$

2 on a $\dfrac{e^{\sqrt{x}} + 1}{e^{x^2} + 1} = \dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(1 + e^{-\sqrt{x}}\right)}{e^{x^2}\left(1 + e^{-x^2}\right)} = e^{\sqrt{x} - x^2} \dfrac{1 + e^{-\sqrt{x}}}{1 + e^{-x^2}}$

quand $x \to +\infty$, $\sqrt{x} \to +\infty$, $e^{-\sqrt{x}} \to 0$, et $e^{-x^2} \to 0$

donc la fraction tend vers 1.

$\sqrt{x} - x^2$ … $x\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}} - 1\right)$ … or $\dfrac{1}{\ldots} \to 0$

donc $\frac{1}{x\sqrt{x}} - 1 \to -1$, donc $x^2\left(\frac{1}{x\sqrt{x}} - 1\right) \to -\infty$

donc $e^{\sqrt{x}-x^2} \to 0$

Ainsi $\boxed{\frac{e^{\sqrt{x}}+1}{e^{x^2}+1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0}$

Problème 1

Q1 $f(x)$ est défini partout où le dénominateur ne s'annule pas, c'est-à-dire pour tout les x avec $\sin x \neq -1$. Le domaine de définition de f est donc

$$\boxed{\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \right\}}.$$

Q4 $f'(x) = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

Q2 De plus, la 2π-périodicité de sin entraîne facilement la 2π-périodicité de f.

Q3 De $\sin(\pi - x) = \sin x$, on déduit que $f(\pi - x) = f(x)$. Ceci signifie que la droite d'équation $x = \pi/2$ est un axe de symétrie de Γ.

Q4 bis Posons $g(x) = \frac{x}{x+1}$ et $h(x) = \sin x$. On a $f = g \circ h$. De plus, h est croissante sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2]$ dont l'image est $]-1, 1]$. La fonction g est elle croissante sur l'intervalle $]-1, 1]$ (par exemple, on peut écrire $g(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$. Par composition, f est croissante sur $]-\pi/2, \pi/2]$. On a $\sin(x) \to$

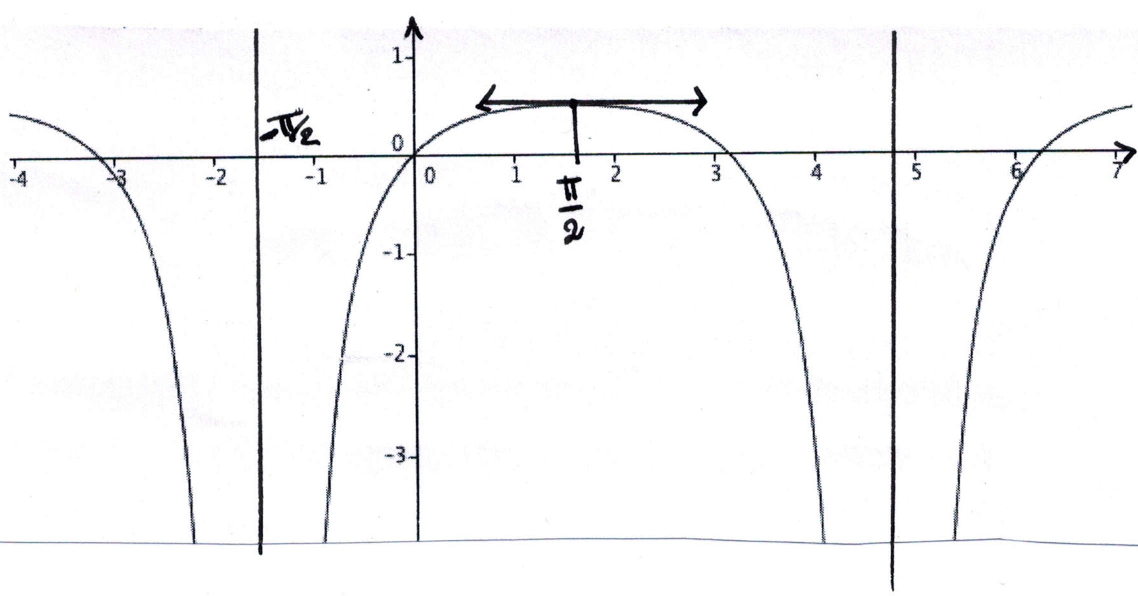
Q5 $-1\hat{}+$ lorsque x tend vers $-\pi/2$ et $\lim \S \to -\infty\hat{}+g(x) = -\infty$. Ainsi, par composition de limites, f tend vers $-\infty$ en $-\pi/2$.

On construit d'abord γ sur $]-\pi/2, \pi/2]$. On la déduit sur $]-\pi/2, 3\pi/2]$ par symétrie d'axe $x = \pi/2$. Enfin, on l'obtient sur $\mathbb{R}$ par périodicité de période 2π, et donc par des translations de vecteur $k2\pi\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$. On obtient :

Q6

x	$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	$-\infty$	0	$1/2$

Q7



Problème 2

Q1 rien de pose problème : f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -xe^{-x} \neq f(x) = xe^{x}$
$\neq -f(x) = -xe^{x}$ en général

f n'a pas de parité, ni de période...

Q2 f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$:
$x \mapsto x$ et $x \mapsto e^{x}$, donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x'e^{x} + x(e^{x})' = e^{x} + xe^{x}$

donc $\boxed{f'(x) = (x+1)e^{x}}$

Q3 $x \to +\infty \Rightarrow e^{x} \to +\infty$ donc $xe^{x} \to +\infty$: $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

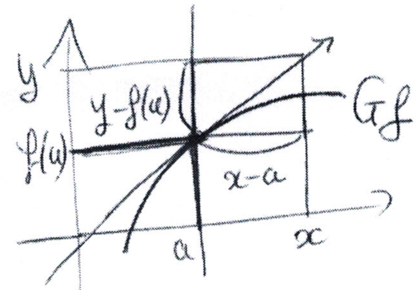
$x \to -\infty \Rightarrow xe^{x} \to 0$ par croissance comparée

donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

Q4

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

on a $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x+1 > 0$
$\Leftrightarrow x > -1$
et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$



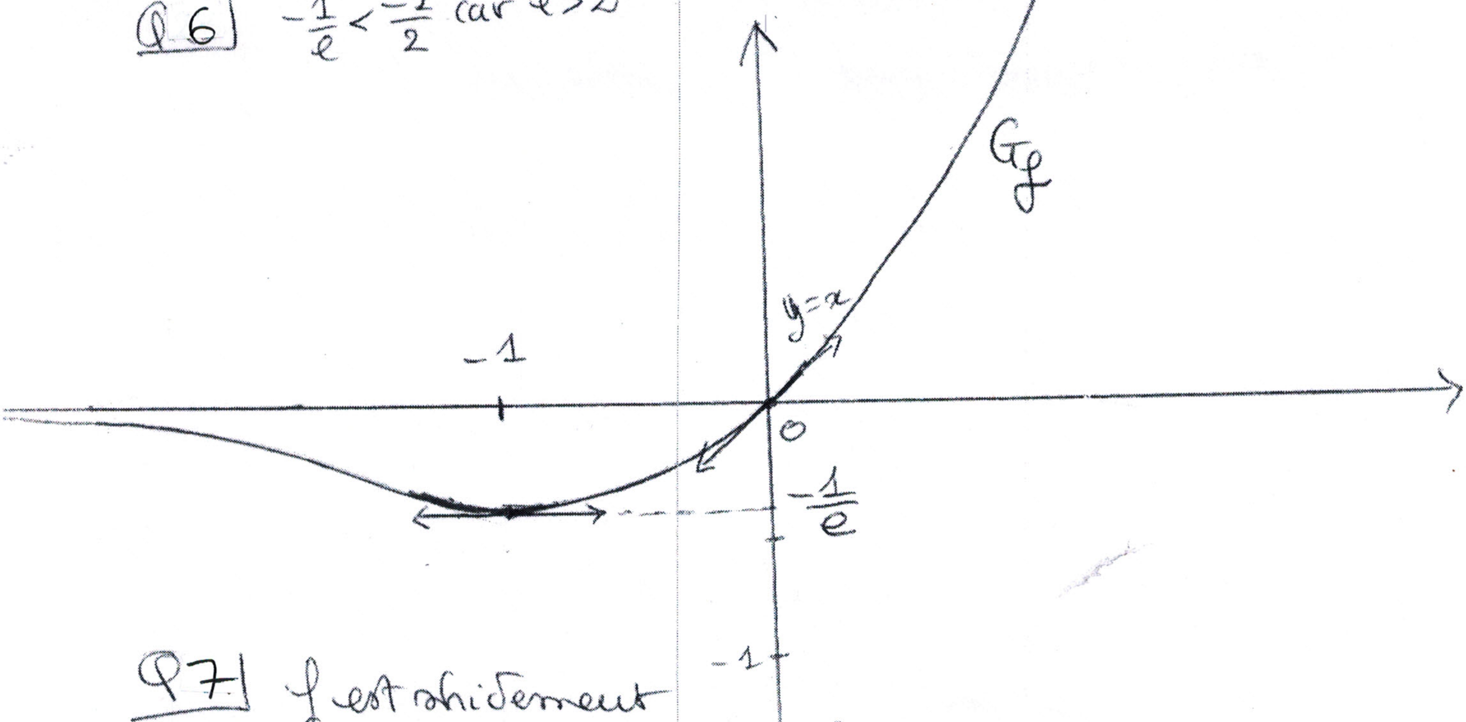
Q5 on a l'équation $\dfrac{y - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

$a = 0$

or $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$

donc $\dfrac{y}{x} = 1$ d'où $\boxed{y = x \text{ est l'équation de la tangente à } G_f \text{ en } (0, f(0))}$

Q6) $-\frac{1}{e} < -\frac{1}{2}$ car $e > 2$



Q7) f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$,
continue sur cet intervalle car dérivable,
de plus $f(-1) = -e^{-1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

donc $\boxed{f \text{ induit une bijection de } [-1,+\infty[\text{ vers } [-e^{-1},+\infty[}$

Q8) on a $\forall x \in]-1,+\infty[$, $h'(x) = (x+1)e^x > 0$

donc $h'(x) \neq 0$

ainsi $\boxed{g = h^{-1} \text{ est dérivable sur }]-e^{-1},+\infty[}$

Q9) le cours nous dit que la dérivée de la réciproque de h vérifie $\forall x \in]-e^{-1},+\infty[$, $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(x))}$, or $g = h^{-1}$

donc $g'(x) = \dfrac{1}{(g(x)+1)e^{g(x)}}$, par Q25)

$g'(x) = \dfrac{1}{(g(x)+1)\frac{x}{g(x)}}$ car $h(g(x)) = x$
et $h(g(x)) = g(x)e^{g(x)}$
donc $e^{g(x)} = \dfrac{x}{g(x)}$ si $g(x) = 0$
i.e. $x \neq 0$
car $g(0)=0$

donc $g'(x) = \dfrac{g(x)}{x(1+g(x))}$

Q10) f est composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable, et on montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$

en effet $f^{(0)}(x) = f(x) = (x+0)e^x = xe^x$

et $f^{(n+1)}(x) = f^{(n)\prime} = \left((x+n)e^x\right)' = (x+n)'e^x + (x+n)(e^x)'$

$= e^x + (x+n)e^x$

$= \underline{(x+n+1)e^x}$ $\boxtimes$