PCSI2, mathématiques : devoir surveillé n°2

Samedi 5 octobre 2024
Durée 4 heures.
Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.
Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 0 (sur 5 points)
Instructions de présentation.

1. Sur la première page : indiquer **dans l'ordre de l'énoncé** la **page de début de chaque exercice**.
2. Commencer chaque exercice en haut d'une **nouvelle page**.
3. Laisser une marge à gauche de chaque page.
4. Séparer les questions par un **trait horizontal** de la largeur de la page.
5. **Encadrer les résultats.**

Exercice 1 : complexes et trigonométrie.

Q1 En utilisant les formules d'Euler, linéariser $\cos^3 x \sin^2 x$.

Exercice 2 : complexes et sommes.

Soit n un entier naturel.

Q1 Mettre $1 + i\sqrt{3}$ en forme trigonométrique.

Q2 En utilisant la formule de Moivre, calculer $(1 + i\sqrt{3})^n$.

Désormais, on admet que, pour tous complexes $a_0, ..., a_n$, on a

$$\sum_{r=0}^{n} a_r = (a_0 + a_2 + ...) + (a_1 + a_3 + ...) = \sum_{k\in\mathbb{N}, 2k\leqslant n} a_{2k} + \sum_{k\in\mathbb{N}, 2k+1\leqslant n} a_{2k+1}$$

On considère maintenant

$$P_n = \sum_{k\in\mathbb{N}, 2k\leqslant n} \binom{n}{2k}(-3)^k \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k\in\mathbb{N}, 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1}(-3)^k$$

Q3 Calculer P_n et I_n.

Indication : on pourra développer $(1 + i\sqrt{3})^n$ avec le binôme de Newton, puis utiliser les questions précédentes.

Q4 Préciser pour quelles valeurs de n, I_n ou P_n s'annulent.

Exercice 3 : complexes et forme exponentielle.

Q1 Calculer $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{12})$ en remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$

Q1 Déterminer la forme exponentielle des complexes $\sqrt{3} - i$ et $1 - i$.

Q3 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $A = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{125}$

Exercice 4 : fonctions usuelles.

(Les questions sont indépendantes)

Q1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\mathbf{1}.\ \ln(x^2-1) - \ln(2x-1) + \ln 2 = 0 \qquad \mathbf{2}.\ e^{2x} - e^x - 6 = 0$$

Q2 Pour chacune des expressions suivantes, donner l'ensemble D des $x \in \mathbb{R}$ où elle est définie, et la simplifier :

$$\mathbf{1}.\ x^{\frac{\ln(\ln x)}{\ln x}}; \qquad \mathbf{2}.\ \log_x\left(\log_x x^{x^y}\right)$$

Q3 Déterminer la limite quand x tend vers $+\infty$ des expressions suivantes :

$$\mathbf{1}.\ \ln(x) - e^x \qquad \mathbf{2}.\ \frac{e^{\sqrt{x}}+1}{e^{x^2}+1}.$$

Problème 1 : étude de fonction.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}.$$

On note Γ sa courbe représentative.

Q1 Quel est le domaine de définition de f ?

Q2 Vérifier que f est 2π-périodique.

Q3 Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$. Que dire sur Γ ?

On étudie désormais f sur l'intervalle $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Q4 Justifier que f est dérivable sur I et calculer la dérivée de f sur I.

Q5 Déterminer la limite de f en $-\pi/2$.

Q6 Dresser le tableau de variations de f.

Q7 Tracer l'allure de Γ, sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$, en utilisant toute la largeur de la page.

Problème 2 : étude d'une fonction et de sa réciproque.

Soit f la fonction d'une variabe réelle définie par $f(x) = xe^x$.

Q1 Donner l'ensemble de définition de f. Déterminer sa parité et sa périodicité éventuelles.

Q2 Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Q3 Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Q4 Dresser le tableau de variation de f.

Q5 Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(0, f(0))$.

Q6 Tracer l'allure de la courbe de f sur un dessin de la largeur de la page.

Q7 Démontrer que f induit une bijection h de $[-1, +\infty[$ vers $[-e^{-1}, +\infty[$.

On note g l'application réciproque de h.

Q8 Justifier que g est dérivable sur $]-e^{-1}, +\infty[$.

Q9 Montrer que pour tout $x \in]-e^{-1}, +\infty[-\{0\}$, on a

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x(1+g(x))}$$

Q10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que f est dérivable n fois, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner (et démontrer) l'expression de $f^{(n)}(x)$, i.e. la valeur de la dérivée n-ième de f en un réel x.