Corrigé
TD équations différentielles

Exercice 1

(2)

On obtient la solution générale $y(x) = 1 + C\mathrm{e}^{\arccos x}$ ou encore, et c'est équivalent $y(x) = 1 + C^{'}\mathrm{e}^{-\arcsin x}$

Exercice 2

(5)

a) $y(x) = \dfrac{C-x}{1+x^2}$ b) $y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$

c) $y(x) = \dfrac{C+\arctan x}{1+x^2}$

Exercice 3

(10)

a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+1=0$ de racine double -1 La solution générale homogène est donc $y(x) = (\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{-x}$ Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x) = \alpha e^x$. On obtient $\alpha = 1/4$ La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + (\lambda x+\mu)\mathrm{e}^{-x}$$

b) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+r-2=0$ de racines 1 et -2 La solution générale homogène est donc $y(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$ Une solution particulière est à rechercher de la former $y(x) = \alpha x e^x$. On obtient $\alpha = 1/3$. La solution générale est alors

$$y(x) = \frac{1}{3}x\mathrm{e}^x + \lambda e^x + \mu\mathrm{e}^{-2x}$$

Exercice 4

(15)

a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+2r+2=0$ de racines $-1\pm i$. La solution générale homogène est donc

$$y(x) = \left(\lambda\cos x + \mu\sin x\right)e^{-x}$$

En déterminant une solution particulière à l'équation complexe $z^{''}+2z^{'}+2z = e^{ix}$ on obtient par sa partie imaginaire une solution particulière de l'équation en cours. Au final, la solution générale est

$$y(x) = -\frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x + (\lambda\cos x + \mu\sin x)\mathrm{e}^{-x}$$

b)) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique $r^2+1=0$ de racines $\pm i$. La solution générale homogène est donc

$$y(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$$

On décompose le second membre par la formule $2\cos^2 x = \cos(2x) + 1$ On détermine une solution particulière pour chacun de deux termes puis, par le principe de superposition des solutions, on exprime la solution générale

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3}\cos 2x + \lambda\cos x + \mu\sin x$$

Exercice 5

(17)

Supposons f solution. f est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y + \lambda = 0$ donc $f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \lambda$. De plus, pour une telle fonction,

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{\mathrm{e}} - \lambda$$

et donc une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\frac{C(\mathrm{e} - 1)}{\mathrm{e}} - \lambda = \lambda$$

d'où

$$\lambda = \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{2\mathrm{e}}$$

Finalement, les solutions sont

$$f(x) = C\mathrm{e}^{-x} - \frac{C(\mathrm{e} - 1)}{2\mathrm{e}}$$

Exercice 6

(18)

Une telle fonction est solution d'une équation différentielle de la forme $y' + y = C$ et vérifie $y(0) + y(1) = C$. Les solutions de cette équation différentielle sont $y(x) = C + D\mathrm{e}^{-x}$.

$$y(0) + y(1) = 2C + D\frac{1 + \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = C \Leftrightarrow D = -\frac{\mathrm{e}C}{\mathrm{e} + 1}$$

Les solutions sont les

$$f(x) = C\frac{\mathrm{e} + 1 - \mathrm{e}^{-x+1}}{\mathrm{e} + 1}$$

Inversement : ok

Exercice 7

(20)

Soit f une solution. Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$. De plus

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\mathrm{e}^x f(h) + \mathrm{e}^h f(x) - f(x)}{h} = \mathrm{e}^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} f(x)$$

donc

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \underset{h \to 0}{\to} \mathrm{e}^x f'(0) + f(x)$$

Par suite f est dérivable en x et

$$f'(x) = f'(0)\mathrm{e}^x + f(x).$$

La fonction f est alors solution d'une équation différentielle de la forme $y' = y + C\mathrm{e}^x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 0$. Après résolution, on obtient $f(x) = Cx\mathrm{e}^x$ Inversement, de telles fonctions sont solutions.

Exercice 8
(21)
Soit f une fonction solution (s'il en existe). La dérivée de f apparaît dérivable et donc f est deux fois dérivable avec

$$f^{''}(x) = -f^{'}(2-x) = -f(x)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y^{''}+y=0$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale $y(x)=\lambda\cos x+\mu\sin x$ En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda\sin 2 - \mu\cos 2 \\ \mu = \lambda\cos 2 + \mu\sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1+\sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu$$

En écrivant $\lambda = (\cos 2)\alpha,$ on a $\mu = (1+\sin 2)\alpha$ et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha\left(\sin x + \cos(2-x)\right)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 9
(1580)
a)

$$y(x) = (C+\sin^2 x)\mathrm{e}^x$$

b)

$$y(x) = (x^2+C)\mathrm{e}^{-x^2}$$

c) $y(x) = C\cos x - 2\cos^2 x$

Exercice 10
(1581)
a) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2}$$

avec $C\in\mathbb{R}$. Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x)=-1.$ Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x+1)^2} - 1$$

avec $C\in\mathbb{R}$ On aura $y(0)=1$ si, et seulement si, $C=2/\sqrt{\mathrm{e}}$. b) Solution de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$:

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x}$$

avec $C\in\mathbb{R}$ Solution particulière sur $\mathbb{R}$: $y_0(x)=x-1$ après recherche de solution de la forme $ax+b$. Solution générale sur $\mathbb{R}$

$$y(x) = C\sqrt{x^2+1}\mathrm{e}^{\arctan x} + x - 1$$

avec $c \in \mathbb{R}$ On aura $y(0) = -1$ si, et seulement si, $C = 0$.

Exercice 11
(1608)

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène : $y = \lambda\text{cos}t + \mu\text{sin}t$. Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme

$$y(t) = \lambda(t)\text{cos}(t) + \mu(t)\text{sin}(t)$$

avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda^{'}(t)\text{cos}t + \mu^{'}(t)\text{sin}t = 0 \\ -\lambda^{'}(t)\text{sin}t + \mu^{'}(t)\text{cos}t = \tan^2 t \end{cases},$$

$$\begin{cases} \lambda^{'}(t) = -\text{sin}^3 t/\text{cos}^2 t \\ \mu^{'}(t) = \text{sin}^2 t/\text{cos}t \end{cases},$$

$\lambda(t) = -\dfrac{1}{\text{cos}t} - \text{cos}t$ et

$$\mu(t) = \int \frac{1-\text{cos}^2 t}{\text{cos}t}dt = \frac{1}{2}\text{ln}\frac{1+\text{sin}t}{1-\text{sin}t} - \text{sin}t$$

conviennent car

$$\int \frac{1}{\text{cos}t}dt = \int \frac{\text{cos}t}{1-\text{sin}^2 t}dt = \frac{1}{2}\text{ln}\frac{1+\text{sin}t}{1-\text{sin}t}.$$

Finalement la solution générale de l'équation étudiée est :

$$y(t) = -2 + \frac{1}{2}\text{sin}t\text{ln}\frac{1+\text{sin}t}{1-\text{sin}t} + \lambda\text{cos}t + \mu\text{sin}t$$

sur

$$I_k =]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[.$$

Exercice 12
(1613)

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 de solution homogène : $y(t) = (\lambda t + \mu)e^{-2t}$. Par la méthode de variation des constantes, cherchons une solution particulière de la forme

$$y(t) = \lambda(t)te^{-2t} + \mu(t)e^{-2t}$$

avec λ, μ fonctions dérivables.

$$\begin{cases} \lambda^{'}(t)te^{-2t} + \mu^{'}(t)e^{-2t} = 0 \\ \lambda^{'}(t)(1-2t)e^{-2t} - 2\mu^{'}(t)e^{-2t} = \dfrac{e^{-2t}}{1+t^2} \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} \lambda^{'}(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ \mu^{'}(t) = \dfrac{-t}{1+t^2} \end{cases}$$

$\lambda(t) = \text{arctan}t$ et

$$\mu(t) = -\frac{1}{2}\text{ln}(1+t^2)$$

conviennent. Finalement la solution générale des l'équation étudiée est :

$$y(t) = t\arctan(t)e^{-2t} - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)e^{-2t} + (\lambda t + \mu)e^{-2t}$$