DM3

# Devoir maison à rendre le 02/11/15

*La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1

*Le but de cet exercice est de construire un pentagone régulier à la règle et au compas.*

Les parties de cet exercice sont indépendantes.

### Partie 1

Dans cette partie, on cherche à exprimer $\cos(\pi/5)$ à l'aide de radicaux carrés (c'est à dire à l'aide de racines carrées, par exemple $\sqrt{a + \sqrt{b - \sqrt{c}} + d + \sqrt{e} + \ldots}$). Pour cela, on considère l'équation suivante :

$$z^5 - 1 = 0 \tag{E}$$

1. Donner les solutions de $(E)$ dans $\mathbb{C}$ sous la forme trigonométrique.
2. On va chercher les solutions sous une autre forme.
   (a) Déterminer le polynôme $Q$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :
   $$z^5 - 1 = (z - 1)Q(z).$$
   (b) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par :
   $$z + \frac{1}{z} = Z.$$
   Vérifier que les quatre zéros complexes de $Q$, que l'on calculera, s'expriment à l'aide de racines carrées.
3. De la question précédente, déduire des expressions par radicaux de :
   (a) $\cos(2\pi/5)$ $\left(= \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$, $\cos(4\pi/5)$, $\sin(2\pi/5)$, $\sin(4\pi/5)$.
   (b) $\cos(\pi/5)$.

### Partie 2 - Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas

On rappelle un des résultats de la partie 1 : $\cos(2\pi/5) = \left(= \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$. On note dans la suite $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $B$ d'affixe $i$, $K$ d'affixe $-\frac{1}{2}$. On note $A_k$ les points d'affixes $w^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

4. (a) Que dire, sans le justifier, du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$ ?
   Soit $J$ le point d'intersection du cercle de centre $K$ passant par $B$ avec la droite $(O, \vec{i})$ d'affixe positive.
   Soit $L$ le milieu de $[OJ]$.

(b) Construire sur une figure : le cercle de centre $O$ de rayon 1 et les points $O$, $B$, $K$, $J$.

(c) Calculer les longueurs $\overline{OJ}$ puis $\overline{OL}$. En déduire que $L$ est la projection orthogonale de $A_1$ sur l'axe des abscisses.

(d) Construire à la règle et au compas les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$.

*On peut montrer (Théorème de Gauss-Wantzel) que le polygone régulier à $n$ côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si $n$ se factorise en un produit d'une puissance de 2 et de nombres premiers de Fermat deux à deux distincts (c'est à dire de la forme $F_k = 2^{2^k} + 1$).*

*Les seuls nombres de Fermat premiers connus sont $F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257$ et $F_4 = 65537$. On peut montrer que $F_5$ n'est pas premier, de même que tous les nombres de Fermat jusque $F_{32}$. Par contre on ne sais rien pour les nombres à partir de $F_{33}$.*

*Ainsi, le Théorème de Gauss-Wantzel assure que l'on peut construire à la règle et au compas un polygone à $n$ côtés si :*

$n = 3, 4 = 2^2, 5, 6 = 2 \times 3, 8 = 2^3, \dots, 65537, \dots$

*Tandis qu'il n'est pas constructible si :*

$n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, \dots$

*Par exemple, la construction (à la règle et au compas) de l'heptagone régulier n'est pas possible car le nombre premier 7 n'est pas de Fermat. L'entier $9 = 32$ est le carré d'un nombre premier de Fermat, donc l'ennéagone régulier n'est pas constructible non plus. Par contre il est possible de construire à la règle et au compas un polygone régulier à 65537 côtés. Cependant, le Théorème de Gauss-Wantzel n'explique pas comment on doit s'y prendre...*

---

## Exercice 2

1. Décomposer la fraction $\dfrac{x-1}{x(x+1)(x+2)}$ en éléments simples, et en déduire $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)}dx$.
2. Même question avec $\displaystyle\int_1^{y} \frac{x-1}{x^3+x}dx$.
3. Linéariser $\cos^4(x)$. En déduire $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4(x)dx$, puis de $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^4(x)dx$.

---

## Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes sur un intervalle à préciser.

1. $y' - 2xy = \mathrm{sh}(x) - 2x\mathrm{ch}(x)$ (on cherchera une solution particulière évidente) ;
2. $y' - y = (x+1)e^t$ ;
3. $ty' - y = t^2e^t$ ;
4. $(1+t^2)y' + y = \arctan(t)$.

---