DS 3 corrigé.

Exercice 1

Q1 on cherche $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, tq $z^2 = -48 + 14i$

donc $\begin{cases} x^2 - y^2 = -48 \\ 2xy = 14 \\ x^2+y^2 = \sqrt{48^2+14^2} = 2\sqrt{24^2+7^2} = 2\sqrt{625} = 2\times 25 \\ \quad = 50 \end{cases}$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \\ 49 \\ \hline 625 \end{array}$$

donc $2x^2 = -48+50 = 2$ d'où $x = \pm 1$

$2y^2 = 50+48 = 98$ d'où $y^2 = 49$ donc $y = \pm 7$

or $xy > 0$ donc $\boxed{z = 1+7i \text{ ou } z = -1-7i}$

Q2 $|1-i| = \sqrt{2}$ donc $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} = 2^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

d'où l'ensemble des racines cubiques de $1-i$

est $\boxed{\left\{ 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{-\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} / k = 0, 1, 2 \right\}}$

Q3 $\Delta = (-1+9i)^2 - 4(-8-8i) = 1 - 81 - 18i + 32 + 32i$

$= -48 + 14i = (1+7i)^2$ d'après Q1

donc les solutions de (E_1) sont $z_1 = \frac{1-9i+1+7i}{2} = \boxed{1-i}$

et $z_2 = \frac{1-9i-1-7i}{2} = \boxed{-8i}$

Exercice 4

Q1 EDL1 $\iff y' + \frac{2x}{x^2+1} y = -1$

équation homogène : $y_0 = \lambda e^{-\ln(x^2+1)} = \frac{\lambda}{x^2+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

en faisant varier la constante λ on trouve $y_1 = \frac{-x}{x^2+1}$

d'où les solutions : $\boxed{y = y_0 + y_1 = \frac{\lambda - x}{x^2+1}, \lambda \in \mathbb{R}}$

Q2 EDL1 normalisée

équation homogène : $y_0 = \lambda e^{\frac{x^2}{2}+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

solution évidente : $y_1 = -1$

d'où $y = y_0 + y_1 = \lambda e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1$ mais $y(0) = 1$ donc $\lambda = 2$

ainsi la solution du problème de Cauchy est $\boxed{y = 2e^{\frac{x^2}{2}+x} - 1}$

Exercice 3

Q1 $I = \int_1^e \cos(\ln x)\,dx = \underset{\substack{u=\ln x \\ du=\frac{dx}{x} \\ x=e^u}}{} \int_0^1 \cos u \, e^u \, du = \boxed{\frac{1}{2}\left(e(\sin 1+\cos 1)-1\right)}$

avec 2 IPP en dérivant cos, puis sin.

Q2 $= \boxed{-(t^2+2t+3)e^{-t}+c}$ par 2 IPP en dérivant t^2+1, puis $2t$

Q3 $\int \frac{1}{2+it}dt = \int \frac{2-it}{4+t^2}dt = \int \frac{2dt}{4+t^2} - i\int\frac{t\,dt}{4+t^2}$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+(\frac{t}{2})^2} - \frac{i}{4}\int\frac{t\,dt}{1+(\frac{t}{2})^2}$ → changement de variable $u=\frac{t}{2}$

$= \int \frac{du}{1+u^2} - i \int \underbrace{\frac{u\,du}{1+u^2}}_{\frac{y'}{y}} = \boxed{\arctan\frac{t}{2} - \frac{i}{2}\ln\left|1+\frac{t^2}{4}\right| + c}$

Q4 $= \boxed{\frac{\pi}{8}}$ par linéarisation.

Q5 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-5x+6} = \boxed{\ln 3 - \ln 2}$ par décomposition en éléments simples : $\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$

Exercice 2

Q1) on a $Z=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k$: on reconnait la somme des puissances d'un complexe, donc, $\underline{\text{si } e^{ix}\neq 1,\ Z=\frac{(e^{ix})^{n+1}-1}{e^{ix}-1}}$

et si $\boxed{e^{ix}=1,\ Z=n+1}=(n+1)e^{i0}\ \left(\begin{matrix}r=n+1\\ \alpha=0\end{matrix}\right)$

On a $e^{ix}=1 \iff x=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ — angle moitié

Si $e^{ix}\neq 1$: $Z=\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1}=\frac{e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\left(e^{i(n+1)\frac{x}{2}}-e^{-i(n+1)\frac{x}{2}}\right)}{e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}\right)}$

donc $Z=e^{in\frac{x}{2}}\frac{2i\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{2i\sin\frac{x}{2}}=e^{in\frac{x}{2}}\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$

et donc $\boxed{Z=re^{i\alpha} \text{ avec } r=\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\in\mathbb{R} \text{ et } \alpha=n\frac{x}{2}\in\mathbb{R} \quad \text{si } e^{ix}\neq 1}$

Q2) pour $k=0$: $\sin\frac{k\pi}{n}=0$ et pour $k=n$, $\sin\frac{n\pi}{n}=\sin\pi=0$.

Q3) on a $S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)=\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\frac{\pi}{n}}\right)$

avec Q6) et $x=\frac{\pi}{n}$, on a $n\geqslant 2$ donc $0<\frac{\pi}{n}<\pi$ et $e^{i\frac{\pi}{n}}\neq 1$

donc $S_n=\mathrm{Im}\left(\frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2n}\right]}{\sin\frac{\pi}{2n}}e^{in\frac{\pi}{2n}}\right)=\frac{\sin\left[(n+1)\frac{\pi}{2n}\right]}{\sin\frac{\pi}{2n}}\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}$

$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\sin\left(\cancel{n}\frac{\pi}{2\cancel{n}}+\frac{\pi}{2n}\right)\right)$

$=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\cos\frac{\pi}{2n}+\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\sin\frac{\pi}{2n}\right)$

$=\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$ donc $\boxed{S_n=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}}$ □

Q4) prenons $n=4$: $S_4=\sum_{k=1}^{3}\sin\frac{k\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3\pi}{4}$

donc $S_4=\frac{1}{\sqrt2}+1+\frac{1}{\sqrt2}=\frac{2}{\sqrt2}+1=\frac{2+\sqrt2}{\sqrt2}$ or d'après Q8)

$S_4=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}$ donc $\boxed{\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt2}{2+\sqrt2}=\frac{1}{\sqrt2+1}=\frac{\sqrt2-1}{2-1}=\sqrt2-1}$

Q5 on sait que $\dfrac{\tan x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$ or $\dfrac{\pi}{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\dfrac{\tan \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, donc $\dfrac{\pi}{2n \tan \frac{\pi}{2n}} \longrightarrow 1$

donc $\dfrac{\pi S_n}{2n} \longrightarrow 1$ donc $\boxed{\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{2}{\pi}}$

Problème 1

Q1 f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4)$
$= 3(x-2)(x+2)$

donc $f'(x) \leq 0 \iff x \in [-2, 2]$

or $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

d'où le tableau :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	8	$\searrow$	-24	$\nearrow$	$+\infty$

$f(2) = -24$
$f(-2) = 8$

Q2 f est continue sur $\mathbb{R}$, donc en appliquant le TVI sur $]-\infty, -2]$, $[-2, 2]$ et $[2, +\infty[$ où f est strictement monotone, on déduit que f s'annule 3 fois : une sur $]-\infty, -2[$, une sur $]-2, 2[$, une sur $]2, +\infty[$

donc (E) a 3 solutions réelles.

Q3) on a $\cos^3\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}\right)$

$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta + 6\cos\theta\right) = \boxed{\frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta}$

Q4) $x = a\cos\theta$ solution de (E)

$\iff a^3\cos^3\theta - 12a\cos\theta - 8 = 0$

$\iff \frac{a^3}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}a^3\cos\theta - 12a\cos\theta - 8 = 0$

$\iff \frac{a^3}{4}\cos 3\theta + \left(\frac{3}{4}a^3 - 12a\right)\cos\theta - 8 = 0$ (E')

si $\frac{3}{4}a^3 - 12a = 0$ alors (E') $\iff \frac{a^3}{4}\cos 3\theta - 8 = 0$

$\iff \cos 3\theta = \frac{32}{a^3}$ (si $a \neq 0$)

on a $\frac{3}{4}a^3 - 12a = 3a\left(\frac{a^2}{4} - 4\right) = 0 \iff a = 0$ ou $\frac{a^2}{4} - 4 = 0$

i.e. $a^2 = 16$

i.e. $a = \pm 4$

d'où, si $a = 4 \geq 0$ on a (E') $\iff \cos 3\theta = \frac{32}{4^3} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{a = 4 \text{ ramène à (E')} \iff \cos 3\theta = \frac{1}{2}}$

Q5) on a $\cos 3\theta = \frac{1}{2} \iff 3\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff \theta = \pm\frac{\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

$\iff \theta = \pm\frac{\pi}{9} + 2\cancel{3}k'\frac{\pi}{\cancel{3}}$ si $k = 3k'$

ou $\theta = \pm\frac{\pi}{9} + 2(3k'+1)\frac{\pi}{3}$ si $k = 3k'+1$

ou $\theta = \pm\frac{\pi}{9} + 2(3k'+2)\frac{\pi}{3}$ si $k = 3k'+2$

d'où $\theta = \pm\frac{\pi}{9} + 2k'\pi$, ou $\theta = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi$

ou $\theta = \pm\pi/9 + \frac{4\pi}{3} + 2k'\pi$

donc $\cos\theta = \cos\frac{\pm\pi}{9}$ ou $\cos\theta = \cos\frac{7\pi}{9}$ ou $\cos\frac{5\pi}{9}$

ou $\cos\theta = \cos\frac{13\pi}{9}$ ou $\cos\frac{11\pi}{9} = \cos\frac{-7\pi}{9}$

$= \cos\frac{-5\pi}{9}$

donc finalement $\cos\theta \in \left\{\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{5\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}\right\}$

et donc $\boxed{\text{les 3 solutions de E sont } x = 4\cos\frac{\pi}{9},\ x = 4\cos\frac{5\pi}{9},\ x = 4\cos\frac{7\pi}{9}}$

Q6] $x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$= u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$

donc $x^3 - 12x - 8 = u^3 + v^2 + 3uv\,x - 12x - 8 = 0$ (E)

si $uv = 4$ alors $u^3 + v^3 - 8 = 0$ et donc $\underline{u^3 + v^3 = 8}$

Q7] on a $(uv)^3 = u^3v^3 = 64$, $u^3 + v^3 = 8$ | donc u^3 et v^3 sont les racines de $X^2 - 8X + 64$

avec $\Delta = 8^2 - 4\times 64 = 64 - 4\times 64 = -3\times 64 = (i8\sqrt{3})^2$

d'où les racines de $X^2 - 8X + 64$ sont

$X_1 = \dfrac{8 + i8\sqrt{3}}{2} = 4 + i4\sqrt{3}$ et $X_2 = 4 - i4\sqrt{3}$

d'où $u^3 = 4(1 + i\sqrt{3}) = 8\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{8e^{i\frac{\pi}{3}} = u^3}$

$v^3 = 4(1 - i\sqrt{3}) = 8\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{8e^{-i\frac{\pi}{3}} = v^3}$

ou l'inverse : $u = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$, $v = \bar{u}$

Q8] on a donc $u = 8^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{9}}$ ou $8^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right)}$ ou $8^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right)}$

donc $u = 2e^{i\pi/9}$ ou $u = 2e^{i\frac{7\pi}{9}}$ ou $u = e^{i\frac{13\pi}{9}} = e^{-i\frac{5\pi}{9}}$

or $uv = 4$ donc $v = \dfrac{4}{u}$ donc

$(u,v) = \left(2e^{i\pi/9}, 2e^{-i\pi/9}\right)$ ou $\left(2e^{i\frac{7\pi}{9}}, 2e^{-i\frac{7\pi}{9}}\right)$ ou $\left(2e^{-i\frac{5\pi}{9}}, 2e^{i\frac{5\pi}{9}}\right)$

ainsi $x = u + v$ a 3 valeurs possibles :

$$\boxed{x = 4\cos\frac{\pi}{9} \text{ ou } x = 4\cos\frac{7\pi}{9} \text{ ou } x = 4\cos\frac{-5\pi}{9} = 4\cos\frac{5\pi}{9}}$$

on retrouve les valeurs de Q22] ☺