Encore des équations différentielles

Exercice 1
(3808)
Varions la constante...

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
$(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
$y' - \dfrac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
$y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
$y' - \dfrac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Exercice 2
(3813)
Équations du second ordre à coefficients constants

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$y'' - 2y' + y = x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
$y'' + 9y = x + 1$, $y(0) = 0$;
$y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;

Exercice 3
(3806)
Comportement à l'infini d'une solution

Prouver que toute solution de l'équation différentielle $y' + e^{x^2} y = 0$ admet une limite nulle en $+\infty$.

Exercice 4
(3810)
Problème inverse

Donner une équation différentielle dont les solutions sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2},\ C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5
(3811)
Raccordement détaillé

Soient $C, D \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \begin{cases} C \exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ D \exp\left(\dfrac{-1}{x}\right) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur C et D pour que f se prolonge par continuité en 0.

Démontrer que si cette condition est remplie, ce prolongement, toujours noté f, est alors dérivable en 0 et que f' est continue en 0.

On considère l'équation différentielle

$$x^2 y' - y = 0.$$

Résoudre cette équation sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

Résoudre l'équation précédente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6
(3818)
Le plus facile des systèmes différentiels

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' &= \omega y' \\ y'' &= -\omega x' \\ z'' &= 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 7
(3822)
Dissolution d'un composé chimique

La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place 20g de ce composé, et on observe que 5min plus tard, il reste 10g. Dans combien de temps restera-t-il seulement 1g ?

Exercice 8
(3825)
Où est l'équation différentielle ?

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) + f'(x)\big) = 0.$$

Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2