Corrigé
Encore des équations différentielles

Exercice 1
(3808)

On commence par résoudre l'équation homogène $y' + y = 0$ dont la solution générale est $y(x) = \lambda e^{-x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)e^{-x}$. La méthode de variation de la constante donne :

$$\lambda'(x)e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} \implies \lambda'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}.$$

Une solution particulière est donc donné par $y(x) = \ln(1+e^x)e^{-x}$. Finalement, la solution générale de l'équation avec second membre est donnée par

$$x \mapsto \ln(1+e^x)e^{-x} + \lambda e^{-x}.$$

On commence par résoudre l'équation homogène $(1+x)y' + y = 0$, dont la solution générale est donnée par $y(x) = \dfrac{\lambda}{1+x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante, en posant $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1+x}$. On obtient

$$\lambda'(x) = 1 + \ln(1+x).$$

Une primitive est donnée par $\lambda(x) = (1+x)\ln(1+x)$, et la solution générale de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto \frac{\lambda}{1+x} + \ln(1+x).$$

On commence par résoudre l'équation sans second membre $y' - \dfrac{y}{x} = 0$. On remarque que $x \mapsto x$ est une solution. L'ensemble des solutions de l'équation sans second membre est donc les fonctions $x \mapsto Cx$, $C \in \mathbb{R}$.
 On cherche ensuite une solution particulière sous la forme $y(x) = \lambda(x)x$. Reportant dans l'équation différentielle, on trouve l'équation $\lambda'(x) = x$, ce qui donne $\lambda(x) = \dfrac{x^2}{2} + C$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc donné par les fonctions

$$x \mapsto Cx + \frac{x^3}{2}.$$

On commence par résoudre l'équation homogène $y' - 2xy = 0$. On a

$$y' - 2xy = 0 \iff \frac{y'}{y} = 2x \iff \ln|y| = x^2 + C,$$

et donc la solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{x^2}$. On cherche ensuite une solution particulière de l'équation en utilisant la méthode de variation de la constante. On pose donc $y(x) = \lambda(x)e^{x^2}$ et introduisant y dans l'équation avec second membre, on trouve

$$\lambda'(x)e^{x^2} = (-2x+1)e^x \iff \lambda'(x) = (-2x+1)e^{-x^2+x}.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est donc donnée par

$$x \mapsto e^{-x^2+x}e^{x^2} = e^x.$$

Finalement, les solutions de l'équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{x^2} + e^x$.

On commence par résoudre l'équation homogène $y' - \frac{2}{t}y = 0$. On trouve que les solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = \lambda t^2$. On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante en posant $y(t) = \lambda(t)t^2$. L'équation devient :

$$t^2 = y'(t) - \frac{2}{t}y(t) = \lambda'(t)t^2.$$

Dès lors, $\lambda'(t) = 1$ soit $\lambda(t) = t + C$. Finalement, les solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation de départ sont les fonctions

$$t \mapsto t^3 + Ct^2.$$

Exercice 2
(3813)

On commence par résoudre l'équation homogène $y'' - 2y' + y = 0$. Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$, dont 1 est racine double. Les solutions générales de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x.$$

Comme 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1. Mais $y(x) = ax + b$ est solution de l'équation différentielle si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2a + ax + b = x \iff a = 1 \text{ et } b = 2.$$

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda e^x + \mu x e^x + (x + 2).$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = y'(0) = 0$, on obtient les équations

$$\lambda + 2 = 0 \text{ et } \lambda + \mu + 1 = 0,$$

soit $\lambda = -2$ et $\mu = 1$. La seule solution de l'équation est donc la fonction

$$x \mapsto (x - 2)e^x + (x + 2).$$

L'équation homogène $y'' + 9y = 0$ admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 9 = 0$, dont les racines sont $3i$ et $-3i$. Les solutions réelles de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \cos(3x)$ et $t \mapsto \sin(3x)$. On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 1, et on trouve $x \mapsto \frac{x+1}{9}$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto A\cos(3x) + B\sin(3x) + \frac{x+1}{9}.$$

La condition $y(0) = 0$ entraîne $A = -1/9$.

L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont 1 est racine double. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto (A + Bx)e^x,\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour résoudre l'équation avec second membre, on linéarise $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$. Par le principe de superposition des solutions, on cherche d'abord une solution particulière qui correspond à $1/2$. La fonction constante égale à $1/2$ convient. On cherche ensuite une solution particulière convenant à $\cos(2x)$ (il suffira ensuite de multiplier par $-1/2$ pour trouver une solution convenant à $-\cos(2x)/2$). On cherche cette solution particulière sous la forme $y(x) = c\cos(2x) + d\sin(2x)$. On a alors

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (-3c - 4d)\cos(2x) + (4c - 3d)\sin(2x).$$

On cherche donc c et d solutions du système

$\{$

$-3c - 4d \quad = \quad 14c - 3d$

0

$Ontrouve$c=-3/25etd=-4/25$.Lessolutionsdel'quationdiffrentiellesontdonclesfonctionsx \mapsto (A+Bx)e^x +$ $\frac{1}{2} + \frac{3}{50}\cos(2x) + \frac{2}{25}\sin(2x),\ A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 3
(3806)
On sait que toute solution s'écrit sous la forme

$$y(x) = ke^{A(x)} \text{ avec } A(x) = -\int_0^x e^{t^2}\,dt \text{ et } k \in \mathbb{R}.$$

Or, pour $t \geq 0$, on a $e^{t^2} \geq 1$ d'où l'on déduit que pour $x \geq 0$,

$$\int_0^x e^{t^2}\,dt \geq \int_0^x 1 = x.$$

On en déduit que $A(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et donc par composition et produit que $y(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4
(3810)
On va procéder par analyse/synthèse. Pour cela, on écrit qu'une solution f s'écrit

$$f(x) = \frac{C + x}{1 + x^2} \iff C = (1 + x^2)f(x) - x.$$

Le but étant d'éliminer C, on dérive la relation précédente, et on trouve

$$0 = (1 + x^2)f'(x) + 2xf(x) - 1.$$

C'est l'équation différentielle recherchée ! En effet, réciproquement, si l'on considère l'équation différentielle

$$(1 + x^2)y'(x) + 2xy(x) - 1 = 0,$$

on prouve facilement que ses solutions sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{C + x}{1 + x^2}$.

Exercice 5
(3811)

Il est clair que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, indépendamment de la valeur de C, et que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \pm\infty$ si $D \neq 0$, et $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ si $D = 0$. Ainsi, on a un prolongement continu en 0 si et seulement si $D = 0$. Dans ce cas, on a $f(0) = 0$.

On suppose donc que $D = 0$. La fonction f étant identiquement nulle à gauche de 0, elle est dérivable à gauche en 0 et sa dérivée est nulle. Pour $x > 0$, on a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{C}{x}\exp(-1/x).$$

Posons $u = \frac{1}{x}$. Lorsque x tend vers 0^+, u tend vers $+\infty$ et

$$\frac{1}{x}\exp(-1/x) = u\exp(-u).$$

Par comparaison des fonctions polynomes et exponentielle, on en déduit que $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+, et donc f' est dérivable à droite en 0, de dérivée nulle. Ainsi, on a bien que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$. La continuité à gauche de f' en 0 ne pose alors pas de problèmes. En ce qui concerne la dérivée à droite, on remarque que, pour $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{C}{x^2}\exp(-1/x) = Cu^2\exp(-u)$$

toujours avec le même changement de variables. Comme précédemment, on en tire que $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$, et donc que f' est continue en 0.

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, la fonction x^2 ne s'annule pas et l'équation est équivalente à

$$y' = \frac{1}{x^2}y.$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(x) = C\exp(-1/x)$, où $C \in \mathbb{R}$. La résolution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ donne exactement le même ensemble de solutions.

Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Sa restriction à $]0, +\infty[$ est solution sur $]0, +\infty[$, et donc il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $y(x) = C\exp(-1/x)$. La restriction de y à $]-\infty, 0[$ est aussi solution sur $]-\infty, 0[$, et donc il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x < 0$, $y(x) = D\exp(-1/x)$. Remarquons ici que C et D n'ont aucune raison d'être égaux. En effet, les résolutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ se font totalement indépendamment.
 D'ailleurs, le résultat des premières questions entraîne que, pour que y soit continue en 0, il est nécessaire que $D = 0$. Dans ce cas, la fonction y est de classe C^1, et elle vérifie bien l'équation différentielle : c'est clair pour $x \neq 0$, et c'est aussi vrai en 0 par continuité de y et y' en 0.

Exercice 6
(3818)
D'abord, l'équation $z'' = 0$ donne facilement $z(t) = at + b$, avec a et b des constantes. Ensuite, on a

$$u' = x'' + iy'' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u.$$

On en déduit que $u(t) = (c + id)e^{-i\omega t}$. En prenant les parties réelles et imaginaires, on trouve que

$$\begin{aligned} x'(t) &= c\cos(\omega t) + d\sin(\omega t) \\ y'(t) &= d\cos(\omega t) - c\sin(\omega t). \end{aligned}$$

Il suffit d'intégrer une nouvelle fois pour trouver les valeurs de x et de y :

$$\begin{aligned} x(t) &= c' \sin(\omega t) - d' \cos(\omega t) + x_0 \\ y(t) &= d' \sin(\omega t) + c' \cos(\omega t) + y_0 \end{aligned}$$

où on a posé $c' = c/\omega$ et $d' = d/\omega$. Il s'agit d'un mouvement hélicoïdal.

Exercice 7

(3822)

On note $x(t)$ la quantité restante en fonction du temps, de sorte que $x(0) = 20$. Du fait que la vitesse de dissolution est proportionnelle à la quantité restante, on tire qu'il existe $\alpha > 0$ de sorte que x est solution de l'équation différentielle

$$-x'(t) = \alpha x(t).$$

La résolution de cette équation différentielle donne $x(t) = Ce^{-\alpha t}$, avec $C \in \mathbb{R}$. De $x(0) = 20$ on tire $C = 20$. Puis, de $x(5) = 10$, on tire

$$20e^{-5\alpha} = 10 \iff \alpha = \frac{1}{5}\ln 2.$$

La quantité restante vaut donc $x(t) = 20\exp(-(\ln 2)t/5)$. On cherche enfin t_0 de sorte que $x(t_0) = 1$. Il vient

$$20\exp(-(\ln 2)t_0/5) = 1 \iff -(\ln 2)t_0/5 = -\ln 20 \iff t_0 = \frac{5\ln 20}{\ln 2}.$$

Exercice 8

(3825)

On pose $g = f + f'$. Alors f est solution de l'équation différentielle $f + f' = g$. On résoud cette équation. L'équation homogène est $f' + f = 0$ dont la solution générale est donnée par λe^{-x}. On résoud l'équation avec second membre par la méthode de variation de la constante : en posant $f(x) = \lambda(x)e^{-x}$, on trouve

$$\lambda'(x)e^{-x} = g(x),$$

et une solution particulière est donnée par

$$f_0(x) = e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt.$$

Finalement, toute fonction f vérifiant $f + f' = g$ s'écrit

$$f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt.$$

Pour montrer que f tend vers 0 en $+\infty$, il suffit de prouver que $e^{-x}\int_0^x g(t)e^t dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Pour cela, on va utiliser que g tend vers 0 en $+\infty$, et on va couper l'intégrale en 2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, pour $t > A$, on a $|g(t)| \leq \varepsilon$. Soit $M = \int_0^A |g(t)e^t|dt$ et soit $B \geq A$ tel que, pour $x \geq B$, on a $e^{-x}M \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $x \geq B$, il vient

$$\begin{aligned} \left| e^{-x}\int_0^x g(t)e^{-t}dt \right| &\leq e^{-x}\int_0^A |g(t)e^t|dt + e^{-x}\int_A^x |g(t)|e^t dt \\ &\leq e^{-x}M + e^{-x}\int_A^x \varepsilon e^t dt \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On a bien prouvé que $\lim_{+\infty} f = 0$.