Exercices du chapitre 5

Exercice 1

Montrer que pour toutes parties A, B, C d'un ensemble E on a
a) $A - B = A \cap \overline{B}$
b) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
c) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$
d) A et B sont disjoints ssi $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$
e) $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont disjoints ssi $A \cup B = E$.
f) simplifier l'expression $((A \cup B) \cap \overline{C}) \cap ((B \cup C) \cap \overline{A}) \cap ((C \cup A) \cap \overline{B})$

Corrigé

a) soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x \in A - B &\Leftrightarrow x \in A \ et \ x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A \ et \ x \in \overline{B} \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B} \end{aligned}$$

donc, par définition de l'égalité des ensembles, $A - B = A \cap \overline{B}$ ∎

b) soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x \in A - (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \ et \ x \notin (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \ et \ (x \notin B \ et \ x \notin C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A - B) \ et \ (x \in A - C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A - B) \cap (A - C) \end{aligned}$$

c) on a

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A \cap B) &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B \cup \overline{B}) \text{(par distributivité)} \\ &= A \cap E = A \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) &= A \cup (B \cap \overline{A}) \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{A}) \text{(par distributivité)} \\ &= (A \cup B) \cap E \\ &= (A \cup B) \end{aligned}$$

d) on doit démontrer une équivalence, donc deux implications :

$\Rightarrow$ (condition nécessaire) : supposons A et B disjoints, i.e. $A \cap B = \emptyset$. D'après c) on en déduit que $A \cup B = (A - B) \cup \emptyset \cup (B - A)$ et donc $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$ ∎

$\Leftarrow$ (condition suffisante) : supposons $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$ et montrons que $A \cap B = \emptyset$. Soit $x \in E$, tel que $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$. Raisonnons par cas :
si $x \in A$, alors comme $A \cup B = (A - B) \cup (B - A)$, alors $x \in A - B$ car x ne peut appartenir à $B - A$, qui est constitué des éléments de B qui n'appartiennent pas à A. Comme $x \in A - B$, on en déduit de même que $x \notin B$.
si $x \in B$, le cas est symétrique, et on obtient de même que $x \notin A$.
On voit que dans tous les cas, x n'appartient pas à la fois à A et à B, donc $A \cap B$ est vide $\blacksquare$

e) on a $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ donc $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont disjoints ssi $\overline{A \cup B} = \emptyset = \overline{E}$, ce qui équivaut à $A \cup B = E$, en effet, deux parties sont égales ssi leurs complémentaires le sont. $\blacksquare$

f) l'intersection est associative, donc

$$\begin{aligned}
&((A \cup B) \cap \overline{C}) \cap ((B \cup C) \cap \overline{A}) \cap ((C \cup A) \cap \overline{B}) \\
&\quad = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C) \\
&\quad = \overline{A \cup B \cup C} \cap (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)
\end{aligned}$$

Soit $x \in \overline{A \cup B \cup C}$, alors x n'est ni dans A, ni dans B, ni dans C, donc x n'est pas non plus dans $A \cup B$, ni dans $B \cup C$, ni dans $A \cup C$. D'où

$$((A \cup B) \cap \overline{C}) \cap ((B \cup C) \cap \overline{A}) \cap ((C \cup A) \cap \overline{B}) = \emptyset$$

avec des patates :