Corrigé
Exercices du chapitre 5 : ensembles et applications

Exercice 2
(631)
On peut écrire : a), c), e).

Exercice 3
(632)
a)
$$\{1,3,5,7\} = \{n \in \mathbb{N}/\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k+1\} = \{2k+1/k \in \mathbb{N}\}.$$
b)
$$\{1,10,100,1000,\ldots\} = \left\{x \in \mathbb{R}/\exists k \in \mathbb{N}, x = 10^k\right\} = \left\{10^k/k \in \mathbb{N}\right\}.$$
c)
$$\mathbb{Q} = \{p/q|p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}.$$
d)
$$]0,1] = \{x \in \mathbb{R}/0 < x \leq 1\}.$$
e)
$$\{y \in \mathbb{R}/\exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} = \{f(x)/x \in \mathbb{R}\}.$$
f)
$$\{x \in \mathbb{R}/f(x) = y\}.$$

Exercice 4
(636)
a) ($\Rightarrow$) Supposons $A \subset B$. On a toujours $B \subset A \cup B$. Pour $x \in A \cup B$. Que $x \in A$ ou $x \in B$ on a $x \in B$ donc $A \cup B \subset B$. Ainsi $A \cup B = B$.
($\Leftarrow$) Supposons $A \cup B = B$. Puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \subset B$.
b) ($\Rightarrow$) Supposons $A = B$. On a $A \cap B = A = A \cup B$.
($\Leftarrow$) Supposons $A \cap B = A \cup B$. On a $A \subset A \cup B \subset A \cap B \subset B$ et de même $B \subset A$ donc $A = B$.
c) ($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cap C$. On a $B \subset A \cup B = A \cap C \subset A \subset A \cup B = A \cap C \subset C$.
($\Leftarrow$) Supposons $B \subset A \subset C$.
$A \cup B = A = A \cap C$.
d) ($\Rightarrow$) Supposons $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Soit $x \in B$. Si $x \in A$ alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$. Si $x \notin A$ alors sachant $x \in A \cup B$ on a $x \in A \cup C$, or $x \notin A$ donc $x \in C$. Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et de manière symétrique $C \subset B$ d'où l'égalité.
($\Leftarrow$) Si $B = C$ alors clairement $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$.

Exercice 5
(637)
Soit $x \in E$.
$$\begin{aligned} x \in A\Delta B &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \in A \text{ ou } x \notin A) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin B \text{ ou } x \notin A) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B) \end{aligned}$$
d'où l'égalité des ensembles.

Exercice 6

(638)

a) Si $A\Delta B = A\Delta C$ alors pour tout $x \in B$: Si $x \in A$ alors $x \notin A\Delta B$ et donc $x \notin A\Delta C$ et puisque $x \in A$, $x \in C$. Si $x \notin A$ alors $x \in A\Delta B$ et donc $x \in A\Delta C$ et puisque $x \notin A$, $x \in C$. Dans les deux cas $x \in C$. Ainsi $B \subset C$ et un raisonnement symétrique donne $C \subset B$ puis l'égalité. Réciproque immédiate. b) $A\backslash B = A \Leftrightarrow A \cap C_E B = A \Leftrightarrow A \subset C_E B$ or $A \subset C_E B \Leftrightarrow B \subset C_E A$ et donc $A\backslash B = A \Leftrightarrow B\backslash A = B$. c) $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ donc $A\Delta B = A \cap B \Rightarrow A \cap B = \varnothing = A \cup B \Rightarrow A = B =$

Exercice 21

(647)

a) Supposons f injective. $f(E) = (A, B) = f(A \cup B)$ donc $E = A \cup B$. Supposons $A \cup B = E$. Soient $X, Y \in \mathcal{P}(E)$. Si $f(X) = f(Y)$ alors $(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$ donc

$$X = X \cap E = X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B) = Y \cap (A \cup B) = Y \cap E = Y.$$

Ainsi f est injective. b) Supposons f surjective. L'élément $(A, \varnothing)$ possède un antécédent $X \in \mathcal{P}(E)$. On a

$$A \cap B = (X \cap A) \cap B = A \cap (X \cap B) = A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Supposons $A \cap B = \varnothing$. Soit

$$(A', B') \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B).$$

Pour $X = A' \cup B'$, on a

$$f(X) = \Big((A' \cap A) \cup (B' \cap A), (A' \cap B) \cup (B' \cap B)\Big) = (A', B')$$

car $A' \cap A = A'$, $B' \cap A = \varnothing$.

Exercice 17

(648)

a) On a

$$\begin{array}{cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ f(k) & 0 & 2 & 4 & 6 & \dots \end{array}$$

et

$$\begin{array}{cccccc} k & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ g(k) & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \end{array}$$

f est injective car $2k = 2k' \Rightarrow k = k'$ mais non surjective car les nombres impairs ne sont pas des valeurs prises. g est surjective car $2y$ est un antécédent de y mais non injective car un nombre pair et l'impair qui le suit prennent même valeur par g. b) D'une part $(g \circ f)(k) = k$ donc $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. D'autre part

$$(f \circ g)(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair} \\ k-1 & \text{sinon} \end{cases}$$

$g \circ f$ est bijective. $f \circ g$ n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 22

(652)

$$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$$

et

$$f^{-1}([-1,4]) = [-2,2].$$

Exercice 24

(658)

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$ c) $A \cap B$ d) $C_E A$ complémentaire de A dans E. e) $A \cup B$ f) $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$