Chapitre 4 : encore des corrigés

Exo 9 a) $\underline{0_\omega = \emptyset}$ $\quad \underline{1_\omega = \{\emptyset\}} = \{0_\omega\}$ $\quad 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0_\omega, 1_\omega\}$ $\rightarrow$ etc et $\underline{(n+1)_\omega = \{0_\omega, 1_\omega, \dots, n_\omega\}}$

et tous appartiennent à ω car $\omega = \{0_\omega, 1_\omega, 2_\omega, \dots\}$

b) $\underline{0_\omega = \emptyset \subset 1_\omega}$ car $\emptyset$ est inclus dans tout ensemble.

$1_\omega = \{0_\omega\} \subset \{0_\omega, 1_\omega\} = 2_\omega$ donc $\underline{1_\omega \subset 2_\omega}$

...

$n_\omega = \{0_\omega, 1_\omega, \dots, (n-1)_\omega\} \subset \{0_\omega, 1_\omega, \dots, (n-1)_\omega, n_\omega\} = (n+1)_\omega$

d'où $\underline{n_\omega \subset (n+1)_\omega}$

de même pour $\forall n$, $n_\omega = \{0_\omega, 1_\omega, \dots, (n-1)_\omega\} \subset \{0_\omega, 1_\omega, \dots\} = \omega$

donc $\underline{n_\omega \subset \omega}$

c) $n < m$ $\quad n_\omega = \{0_\omega, 1_\omega, \dots, (n-1)_\omega\}$

$m_\omega = \{0_\omega, 1_\omega, \dots, (n-1)_\omega, \underline{n_\omega}, \dots, (m-1)_\omega\}$

donc clairement $\underline{n_\omega \subset m_\omega}$ et $\underline{n_\omega \in m_\omega}$.

Exo 10 a) $\mathcal{P}(1_\omega) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = 2_\omega$

b) $\mathcal{P}(2_\omega) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = 2_\omega$ (voir a)

d) $\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}(\{0_\omega, 1_\omega, \dots\}) = \underline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$: toutes les parties de $\mathbb{N}$.

Exo 11 on a vu (exo 9) $0_\omega \in 1_\omega \in 2_\omega \in 3_\omega \in \omega$

$0_\omega \subset 1_\omega \subset 2_\omega \subset 3_\omega \subset \omega$

donc $0_\omega \in 2_\omega$ $\quad 1 \in 3_\omega$

$0_\omega \in 3_\omega$ $\quad 1 \in \omega$

et $0_\omega \in \omega$

Exo 12 a) $$\bigcup_{A \in 2_\omega} A = \bigcup_{A \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}} A = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = 1_\omega$$

b) $\bigcup_{A\in 3_\omega} A = \bigcup_{A\in\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}} A = \emptyset\cup\{\emptyset\}\cup\{\emptyset,\{\emptyset\}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\} = \underline{2_\omega}$

on a $\bigcup_{A\in n_\omega} A = \bigcup_{A\in\{0_\omega,1_\omega,2_\omega,\dots,(n-1)_\omega\}} A = 0_\omega\cup 1_\omega\cup\dots\cup(n-1)_\omega$

or (exo 11) on a $0_\omega\subset 1_\omega\subset 2_\omega\subset\dots\subset(n-1)_\omega$,

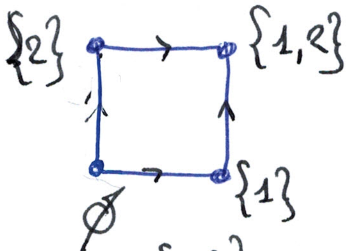
donc $\boxed{\bigcup_{A\in n_\omega} = (n-1)_\omega}$.

c) $\bigcup_{A\in\omega} A = 0_\omega\cup 1_\omega\cup\dots\cup n_\omega\cup\dots = \{0_\omega, 1_\omega, \dots\} = \omega$

si on étend la formule de b) à ω on obtient $\bigcup_{A\in\omega} = \omega-1$

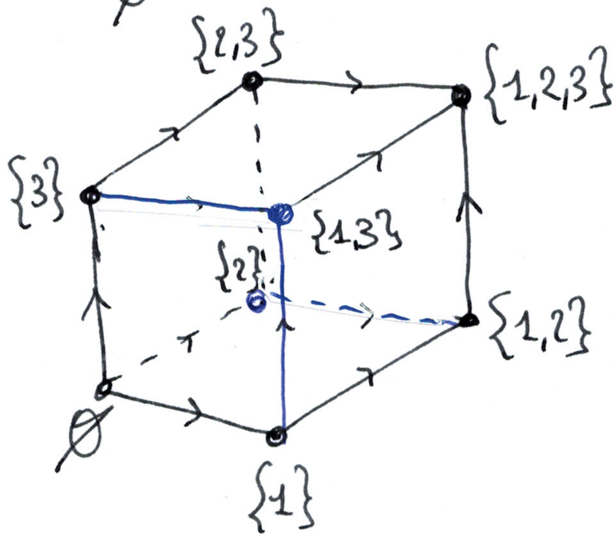
ainsi $\underline{\omega=\omega-1}$ est raisonnable !

$\boxed{\text{Exo 13}}$ a) $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ d'où le schéma



$A \to B$ ssi $A\subset B$ et $\nexists C \neq A, \neq B$ tq $A\subset C\subset B$

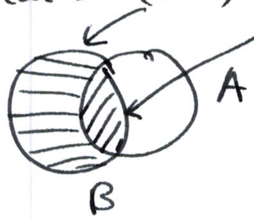
b)



Exo 14

supposons $\begin{cases} A\cup B = A\cup C \\ A\cap B = A\cap C \end{cases}$

soit $x\in B$, alors $x\in B-A$ ou $x\in A\cap B$ (car $B=(B-A)\cup(B\cap A)$)



* si $x\in B-A$: $x\in B$, donc $x\in A\cup B$,
donc $x\in A\cup C$, or $x\notin A$ donc $\underline{x\in C}$

* si $x\in A\cap B$, alors $x\in A\cap C$, donc $\underline{x\in C}$

dans les 2 cas $x\in C$, donc $\underline{B\subset C}$

B et C jouant des rôles symétriques, on a aussi $\underline{C\subset B}$

d'où $\boxed{B=C}$

Exo 15 $G=\{(n+1,n)\mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{(0,0)\}$ définit l'application

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $\begin{cases} f(n)=n-1 & \text{si } n\neq 0 \\ \text{et } f(0)=0\,. \end{cases}$

Exo 20 a) et b) : voir le cours.

c) $g\circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective par a) et f surjective
donc f bijective. On a alors $g=(g\circ f)\circ f^{-1}$
or $g\circ f$ injective et f^{-1} injective, donc (cours) $\underline{g \text{ injective}}$ □

d) même raisonnement que c).

Exo 22 * on a $\exp(\mathbb{R})=\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$ car ($\exists x\in\mathbb{R}$ tq $y=e^x$ ssi $y>0$.)

* $f^{-1}([-1,4])=\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in[-1,4]\}$ par définition
$=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\leq x^2\leq 4\}$

donc $\boxed{f^{-1}([-1,4])=[-2,2]}$