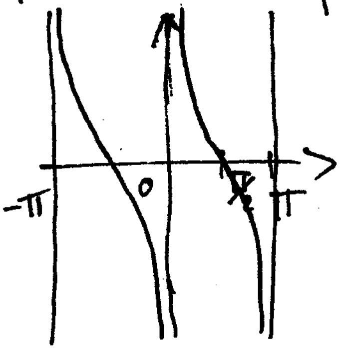
Chapitre 3

Exo 1 : $g\circ f = \mathrm{Id} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \forall x\in I, \\ g\circ f(x) = x \end{array}\right. \Rightarrow (g\circ f)'(x) = 1 \Rightarrow f'(x)\, g'(f(x)) = 1$

Exo 2 $f(x) = \mathrm{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$ $\quad f'(x) = -1 - \mathrm{cotan}^2 x < 0$

période π impaire

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
f'			$-$		
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Exo 3 : $\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2) = 2\cos\left(\omega t + \dfrac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$

Exo 4 $x \in\,]-\pi, \pi]$ $\quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou π

$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{2\pi}{3}$

$x \in [0, 2\pi[$ $\quad \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou π

$\tan x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{3}$

Exo 5 : $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{x}{4} \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4} + k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \dfrac{5x}{4} = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{5} + k\dfrac{4\pi}{5}$ $\quad$ Sol : $-\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4\pi}{5}\mathbb{Z}$

Exo 6 : voir page suivante

Exo 7 $\cos\dfrac{\pi}{2^n}$: utiliser $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

en partant de $\dfrac{\pi}{4}$

$$\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-1}} \qquad \sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}_{n-1}}$$

Exo6 : $\tan x + \tan \frac{1}{x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}^* - \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} - \{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+k\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$

2 cas :

① $\tan x \tan \frac{1}{x} = 1$: $\tan x = \frac{1}{\tan \frac{1}{x}} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}\right)$

donc $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + k\pi$: $x^2 - (\pi/2 + k\pi)x + 1 = 0 \quad \Delta = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 - 4$

d'où étude du signe de Δ et 2 valeurs de x éventuellement.

② $\tan x \tan \frac{1}{x} \neq 1$: alors $\tan\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$

donc $x + \frac{1}{x} = k\pi$, $\Leftrightarrow x^2 - k\pi x + 1 = 0$

$\Delta = k^2\pi^2 - 4$, or $k \neq 0$ donc $\Delta > 0$

et $x = \dfrac{k\pi \pm \sqrt{k^2\pi^2 - 4}}{2}$

reste à vérifier que ces solutions sont bien dans les domaines de $\tan x$ et $\tan \frac{1}{x}$, ce qui est fastidieux !

En fait, je voulais vous donner $\tan x + \frac{1}{\tan x} = 0$

Exo8

$\cos \frac{\pi}{24}$: $\frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$

d'où $\cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$

$\sin \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$

CH4

Exo 9 : soit $x \in [0;\frac{\pi}{2}]$ $\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2 x}}$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos x}$$

si $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ utiliser $\sin(\pi - x) = \sin x$

et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

ainsi que $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \dots$ etc

si $x < 0$, parité ! Voir corrigé détaillé plus loin !

Exo 10 - $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{3\pi}{4} \iff x + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$

$\iff x = -\frac{11\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$

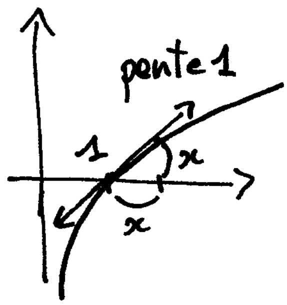
- $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff 2x + \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi$

$\iff x = -\frac{\pi}{8} + k\pi$

Exo 11 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ on a $1+\frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$, donc $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$

et télescopage : $S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$

l'étude $\ln x$ en $x=1$ montre que $\ln(1+x) \leq x$



donc $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$

d'où $\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ or $\ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

$\square$

Exo 12 $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^x$ définie pour $\frac{x-1}{x} > 0$ donc $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty$

car $f(x) = e^{x \ln \frac{x-1}{x}}$

$$f'(x) = \underbrace{\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x-1}\right)}_{g(x)} f(x)$$

$g'(x) = \frac{-1}{x(x-1)^2}$ <0 si $x>1$ $\quad x \to +\infty \quad g(x) \to 0$

>0 si $x<0$ $\quad x \to -\infty \quad g(x) \to 0$

donc

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
g'		$+$	‖	‖	$-$	
g	0	$\nearrow$ 0	‖	‖	0 $\searrow$	0
g		$+$	‖	‖	$+$	
f'		$+$	‖	‖	$+$	
f	e^{-1}	$\nearrow$	1 ‖	‖ 0	$\nearrow$	e^{-1}

donc $g>0$ sur $]1;+\infty[$

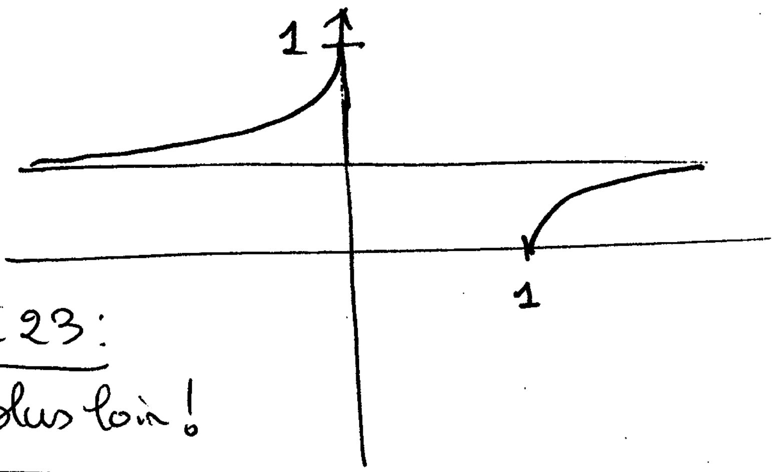
$g>0$ sur $]-\infty;0[$

$f \to e^{-1}$ en $+\infty$

$f \to 0$ en 1

$f \to e^{-1}$ en $-\infty$

$f \to 1$ en 0



Exos 13 à 23 :

voir plus loin !

Exo 24 soit $X = e^x e^y$, $Y = e^x + e^y$, alors $\begin{cases} Y = a+b \\ X = \frac{a+b}{a-b} \end{cases} \iff X, Y$ solutions de

$$Z^2 - (a+b)Z + \frac{a+b}{a-b} = 0$$

$\Delta = (a+b)^2 - 4\frac{a+b}{a-b}$ étude du signe de Δ : conditions sur a et b

puis $Z = \frac{a+b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ et $x = \ln\frac{a+b}{2} + \ln\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{a^2-b^2}}\right)$

$y = $ ——

Exo 25 $-\ 2012 = 182\times 11+10$, $\cos\frac{2012\pi}{11} = \cos\frac{10\pi}{11}+182\pi = \cos\frac{10\pi}{11}$

$$A = \arcsin\left(\cos\frac{10\pi}{11}\right) = \arcsin\Big(\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{10\pi}{11}\right)}_{-\frac{9\pi}{22}}\Big) = -\frac{9\pi}{22} \quad \text{car } -\frac{9\pi}{22}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

$-\ 2013 = 503\times 4+1$

$$B = \sin\frac{2013\pi}{4} = \sin 503\pi+\frac{\pi}{4} = \sin \pi+\frac{\pi}{4} = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arctan(B) = \arctan\left(\sin-\frac{\pi}{4}\right) = -\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exo 26. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\quad\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ donc $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$

Exo 27 $x=0$ ou $x = \pm\frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{2}}$

Exo 28: $x=0$ $\quad$ **Exo 15** $x = 21\pm 12\sqrt{3}$

Exo 16: $\left]-\frac{7}{2};-3\right[\cup\left]-3;-2\right[\cup\left]-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

Exo 17: étudier les variations de $x\to x\ln x+(1-x)\ln(1-x)$

Exo 18: (x,x) si $a=1$, $\left(a^{1/(a-1)},\ a^{a/(a-1)}\right)$ si $a\neq 1$.

Corrigé de l'exercice 9, chapitre 3

Exprimer $\sin\frac{x}{2}$ en fonction de $\sin x$. Même question avec cos.

Posons $y = \frac{x}{2}$. Exprimons $\sin y$ en fonction de $\sin 2y$.

$$\begin{aligned}
&\sin^2 2y = 1-\cos^2 2y = 1-(1-2\sin^2 y)^2\\
\Rightarrow &(1-2\sin^2 y)^2 = 1-\sin^2 2y \geqslant 0\\
\Rightarrow &|1-2\sin^2 y| = \sqrt{1-\sin^2 2y}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sin^2 y \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 y = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\sin^2 2y})\\
&\frac{1}{2} \leqslant \sin^2 y \Rightarrow \sin^2 y = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\sin^2 2y})
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\sin^2\frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1-\sqrt{1-\sin^2 x})\\
&\frac{1}{2} \leqslant \sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-\sin^2 x})
\end{aligned}$$

Pour cos, on peut changer $\sin^2$ en $1-\cos^2$... mais c'est plus rapide avec

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$$

qui donne

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

Corrigé de l'exercice 23, chapitre 3

Simplifier la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$$

en étudiant sa dérivée.

Domaine de définition : pour la fraction, $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 \neq 0$.
Pour arcsin :

$$\begin{aligned}
&-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \\
\Leftrightarrow &-1-x^2 \leqslant 2x \leqslant 1+x^2 \quad \text{car } 1+x^2>0 \\
\Leftrightarrow &-(1+x)^2 \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant (1-x)^2
\end{aligned}$$

Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

Dérivée : à cause de arcsin, f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.
Posons

$$g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

On a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{2(1+x^2) - 2x2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
f'(x) &= g'(x) \arcsin'(g(x)) \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(2x)^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(2x)^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \quad \text{car } 1+x^2 \geq 0 \\
&= \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)|1-x^2|}
\end{aligned}$$

2 cas se présentent :
1. $x^2 < 1$, i.e. $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

donc $f(x) = 2\arctan x + c$; on a $f(0) = 0$ donc $c = 0$:

$$\boxed{\forall x \in]-1, 1[, f(x) = 2\arctan x}$$

2. $x^2 > 1$ i.e. $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$$

Il faut étudier f sur chacun des intervalles :

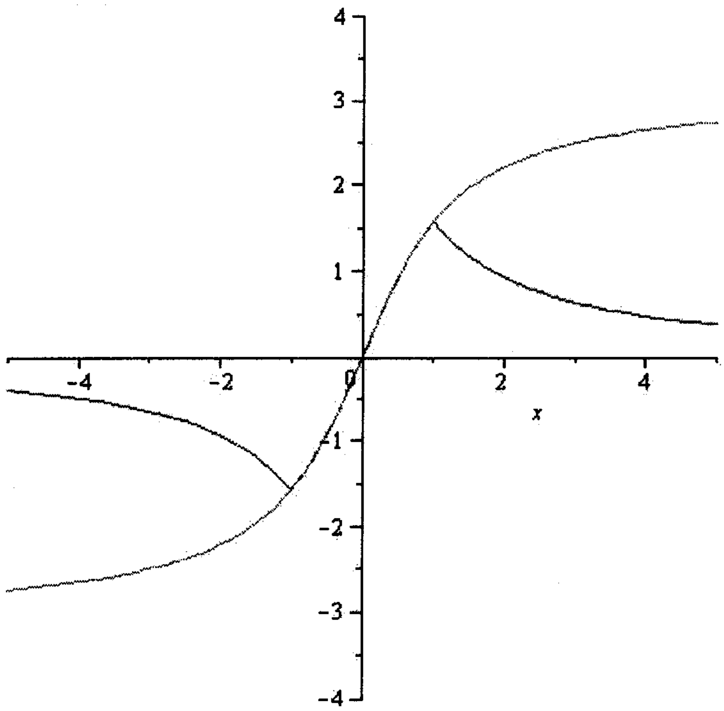
- si $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = -2\arctan x + c'$; on a $\sqrt{3} > 1$, $f(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}$ donc $\frac{\pi}{3} = -2\frac{\pi}{3} + c'$, donc $c' = \pi$:

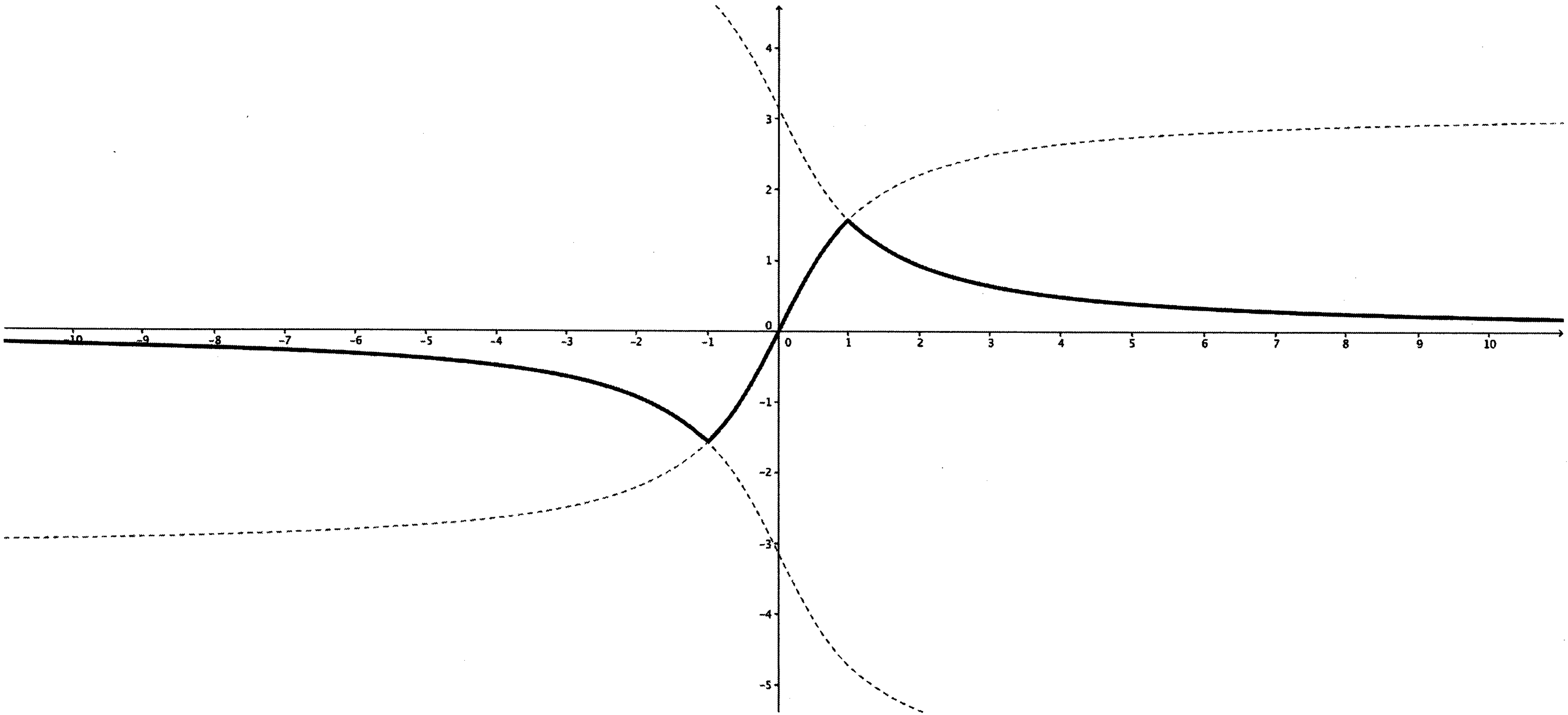
$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \pi - 2\arctan x}$$

Remarque : on aurait aussi pu étudier f en $+\infty$ pour déterminer la constante c'.
- si $x \in]-\infty, -1[$, comme f est impaire, d'après ce qui précède, on a

$$\boxed{\forall x \in]-\infty, -1[, f(x) = -f(-x) = -(\pi - 2\arctan -x) = -\pi - 2\arctan x}$$

Enfin, on vérifie que les 3 expressions de f précédentes sont valables en $x = \pm 1$.
Courbes : en rouge, f, en vert, $2\arctan x$





4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10