Chapitre 3, exercices : suite des corrigés.

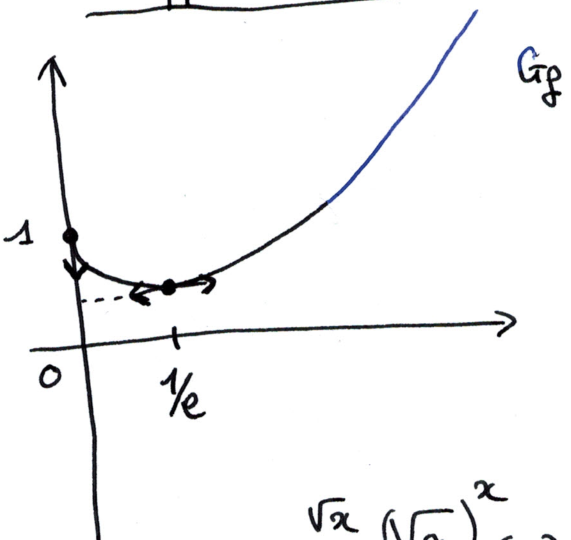
Exo 13 (Voir le cours) on écrit $f(x) = x^x = e^{x\ln x}$ d'où $D_f = \mathbb{R}_+^*$

$\forall x>0,\ f'(x) = (x\ln x)' e^{x\ln x} = (\ln x + 1)\, e^{x\ln x}$ car f dérivable sur D_f ($\ln$ et $\exp$ le sont)

d'où le tableau

x	0		$1/e$		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

et le graphe



Exo 14 on doit avoir $x>0$; ainsi $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \iff e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln\sqrt{x}}$

$\iff \sqrt{x}\ln x = x\frac{1}{2}\ln x \iff \begin{cases} \text{soit } \ln x = 0, \text{ i.e. } x=1 \\ \text{soit } \sqrt{x} = \frac{x}{2}, \text{ i.e. } 1 = \frac{\sqrt{x}}{2} \text{ donc } x = 4 \end{cases}$

Donc $\boxed{\text{les solutions sont } 1 \text{ et } 4.}$

Exo 15 on doit avoir $x+3>0$ et $x>0$, c'est-à-dire $\underline{x>0}$

dans ce cas l'équation est équivalente à $\ln\frac{x+3}{4} = \ln\sqrt{3x}$

$\iff \frac{x+3}{4} = \sqrt{3x}$ car $\ln$ est injective

$\iff (x+3)^2 = 16(3x) \iff x^2 + 6x + 9 = 48x$

$\iff x^2 - 42x + 9 = 0$ de discriminant $\Delta = 42^2 - 36 = 1728$

$\Delta = (24\sqrt{3})^2$ donc $x = \frac{42 + 24\sqrt{3}}{2} = 21 + 12\sqrt{3} > 0$

ou $x = \frac{42 - 24\sqrt{3}}{2} = 21 - 12\sqrt{3} > 0$

donc $\boxed{\text{les solutions sont } 21 + 12\sqrt{2} \text{ et } 21 - 12\sqrt{3}}$

Exo 17 Etudions la fonction f tq $f(x) = x^x (1-x)^{1-x}$ sur $]0,1[$

on a $x \in]0,1[\Rightarrow 1-x>0$ donc f est bien défini et

$$f(x) = e^{x\ln x} \times e^{(1-x)\ln(1-x)} = e^{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}$$

f est dérivable sur $]0,1[$ (car $\ln$ et $\exp$ le sont) et pour $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \left(x\ln x + (1-x)\ln(1-x)\right)' e^{x\ln x + (1-x)\ln(1-x)}$$

$$= \left(\ln x + 1 - \ln(1-x) + \cancel{(1-x)}\frac{-1}{\cancel{1-x}}\right) f(x)$$

$$= \left[\ln x - \ln(1-x)\right] f(x)$$ du signe de $\ln x - \ln(1-x)$ car $f(x)>0$

on a $\ln x - \ln(1-x) \geq 0 \iff \ln \frac{x}{1-x} \geq 0 \iff \frac{x}{1-x} \geq 1$

$\iff x \geq 1-x \iff x \geq \frac{1}{2}$

d'où le tableau de variation :

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$

le tableau montre clairement que $\boxed{\forall x \in]0,1[, \ f(x) \geq \frac{1}{2}}$ ☐

Exo 19 on a $\text{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\text{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

donc l'équation devient $2(e^x + e^{-x}) + \frac{3}{2}(e^x - e^{-x}) - 4 = 0$

$\iff 7e^x + e^{-x} - 8 = 0 \iff 7e^{2x} - 8e^x + 1 = 0$ (en multipliant par e^x)

posons $X = e^x$ ainsi $7X^2 - 8X + 1 = 0$ $\quad \Delta = 64 - 4\times 7 = 36$

d'où $X = \frac{8 \pm 6}{14} = 1$ ou $\frac{1}{7}$ qui sont bien >0 (car $X>0$)

on a donc les solutions $\boxed{x = 0 \text{ ou } x = -\ln 7}$

Exo 20 il suffit d'utiliser la définition de ch et sh...

Exo 21 arcsin est défini sur $[-1,1]$, arccos aussi, donc on doit avoir $|x| \leq 1$ et $|2x| \leq 1$, soit $|x| \leq \frac{1}{2}$

i.e. $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

__Analyse:__ dans ce cas $\arcsin x = \arccos 2x \overset{(**)}{\Rightarrow} \sin(\arcsin x) = \sin(\arccos 2x)$

$\Leftrightarrow x \overset{(*)}{=} \sqrt{1-(2x)^2} \Rightarrow x^2 = 1 - 4x^2 \Rightarrow 5x^2 = 1$

$\Leftrightarrow |x| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ mais $x \geq 0$ par $(*)$ donc $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

on a bien $\frac{1}{\sqrt{5}} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

__Synthèse:__ d'après $(**)$, $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ ont même sinus, or $\arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc __ils sont égaux__ ☑

Exo 22 utiliser $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ et $\tan(\arctan x) = x$

puis résoudre en x. On trouve une seule solution:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Exo 29 graphe: