Correction exercice 19 : Méthode de Cardan

1. $u \neq 0$ car $U \neq 0$ puisque $p \neq 0$.

2. $u^3 v^3 = u^3 \left(\frac{-p}{3u}\right)^3 = \frac{-p^3}{27}$. Comme U et V sont racines de (R), $UV = \frac{-p^3}{27}$ (cours), donc $V = \frac{u^3 v^3}{U} = v^3$.

3. $u^3 + v^3 = U + V$ or U et V racines de (R), donc $U+V = -q$
donc $\boxed{u^3 + v^3 = -q}$

4. $(u+v)^3 + p(u+v) + q = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q$
$= (u^3+v^3) + 3uv(u+v) + p(u+v) + q$ or $uv = \frac{-p}{3}$ (1)
$= -q - 3\frac{p}{3}(u+v) + p(u+v) + q$
$= 0$

5 on a $j^3 = 1$. Donc $(ju)^3 = U$: ju est aussi une racine cubique de U, comme j^2u. On peut reprendre le raisonnement précédent avec ju : v devient $\frac{-p}{3ju} = j^2 v$.
Ainsi $ju + j^2 v$ est racine de (E).
Avec $j^2 u$, v devient $\frac{-p}{3j^2u} = jv$, donc $j^2u + jv$ est aussi racine de (E) : on obtient les 3 racines de (E) :

$$\begin{cases} u+v \\ ju + j^2 v \\ j^2 u + jv \end{cases}$$

6. $p = q = -1$: (R) est $z^2 - z + \frac{1}{27} = 0$ $\Delta = 1 - \frac{4}{27} = \frac{23}{27} > 0$
$U = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2}$ $V = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2}$ $u = U^{\frac{1}{3}}$ $v = \frac{1}{3u} = \frac{1}{3U^{\frac{1}{3}}}$
d'où $z_0 = u + v \in \mathbb{R}$ et $\boxed{z_0 = \left(\frac{1+\sqrt{\frac{23}{27}}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3\left(\frac{1+\sqrt{\frac{23}{27}}}{2}\right)^{1/3}}}$

solution de $z^3 - z - 1 = 0$

7. $p=-3, q=1$: (R) est $Z^2+Z+1=0$ $\Delta = 1-4 = (i\sqrt{3})^2$

$U = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ $V = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = j^2$

soit $u = j^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{9}}$ $v = \frac{1}{u} = e^{\frac{-2i\pi}{9}} = \bar{u}$

u racine $9^{\text{ième}}$ de l'unité (v aussi)

$\bar{u} = v$ donc $u+v \in \mathbb{R}$ $u+v = 2\cos\frac{2\pi}{9}$

donc $\boxed{z_0 = 2\cos\frac{2\pi}{9}}$ est racine réelle de (E) :

$$z^3 - 3z + 1 = 0$$

8. Posons déjà $a=1$ pour simplifier, puisque $a \neq 0$.
Idée : changer z en $Z+\alpha$ pour éliminer le terme en Z^2.

$$(Z+\alpha)^3 + b(Z+\alpha)^2 + c(Z+\alpha) + d = 0$$

d'où $Z^3 + 3Z^2\alpha + 3Z\alpha^2 + Z^3 + bZ^2 + 2\alpha Zb + b\alpha^2 + cZ + c\alpha + d = 0$

$$Z^3 + Z^2(3\alpha + b) + Z(\dots) + (\dots) = 0$$

en posant $\alpha = \frac{-b}{3}$, on se ramène donc à une équation du type de (E) : $Z^3 + pZ + q = 0$.

Application : on trouve $z = -1, i, -i$!