1 Chapitre 6 : primitives et équations différentielles : Exercices

---

Exercice 1
Calculer

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

Corrigé :

on décompose en éléments simples : $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x-2}$. En multipliant à gauche et à droite par $x-1$, en simplifiant, et en remplaçant x par 1 on obtient $a=-1$, en faisant de même avec $x-2$ et $x=2$, on obtient $b=1$. Du coup

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{-dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = \boxed{\ln|x-2| - \ln|x-1|}$$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+i+x}$

Corrigé :

Attention, le dénominateur est complexe, on ne peut donc pas utiliser le log pour intégrer ! On se débarasse des complexes en multipiant haut et bas par le conjugué du dénominateur : $1-i+x$ (x est réel) :

$$\int \frac{dx}{1+i+x} = \int \frac{(1-i+x)dx}{1+(1+x)^2}$$

le dénominateur ressemble à celui de la dérivée de $\arctan$, d'où on effectue le changement de variables $y = x+1$, on a $dy = dx$, et donc

$$\int \frac{dx}{1+i+x} = \int \frac{(y-i)dy}{1+y^2} = \int \frac{ydy}{1+y^2} - i\int \frac{dy}{1+y^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln(1+y^2) - i\arctan(y) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(1+(1+x)^2) - i\arctan(1+x)}$$

c) $\displaystyle\int \sin^5 x\, dx$

Corrigé :

linéariser, ou bien poser $y = \cos x$, on trouve dans le premier cas

$$\boxed{\frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)}$$

d) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$

Corrigé :

linéariser, ce qui donne $\frac{1}{32}(-\cos 6x - 2\cos 4x + \cos 2x + 2)$ et en intégrant

$$\boxed{\frac{1}{32}(-\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x + 2x)}$$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$

Corrigé :

on a $\displaystyle\frac{1}{\sin x + \sin 2x} = \frac{1}{\sin x + 2\sin x\cos x}$: on doit calculer une primitive d'une fraction rationnelle trigonométrique, i.e. un quotient de polynômes en $\sin$ et $\cos$. **La méthode générale est de faire le changement de variables** $t = \tan\frac{x}{2}$. En effet on a alors

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\right)} \\ &= \int \frac{dt}{t(3-t^2)}\end{aligned}$$

multiplions haut en bas par t, on obtient $\displaystyle\int \frac{d(t^2)}{2t^2(3-t^2)}$, ce qui suggère de poser $y = t^2$:

$$\int \frac{tdt}{t^2(3-t^2)} = \int \frac{dy}{2y(3-y)}$$

on termine en décomposant en éléments simples :

$$\frac{1}{y(3-y)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{3-y}\right)$$

d'où

$$\int \frac{dy}{2y(3-y)} = \frac{1}{6}\left(\ln|y| - \ln|3-y|\right)$$

finalement

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x+\sin 2x} &= \frac{1}{6}\left(\ln|y|-\ln|3-y|\right)\\ &= \frac{1}{6}\left(\ln t^2-\ln|3-t^2|\right)\\ &= \boxed{\frac{1}{6}\left(\ln\tan^2\frac{x}{2}-\ln|3-\tan^2\frac{x}{2}|\right)}\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$ g) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{(x+1)(x-3)}$

Exercice 2

Résoudre sur un intervalle adéquat :

1. $(a+x)y'+y=1+\ln(1+x)$

Corrigé :

supposons $x>-1$ et $x\neq -a$, l'équation devient

$$y'+\frac{y}{a+x}=\frac{1+\ln(1+x)}{a+x}$$

en appliquant le théorème du cours, on a

$$y=(C(x)+\lambda)e^{-A(x)}$$

avec A une primitive de $\dfrac{1}{a+x}$ et C une primitive de $\dfrac{1+\ln(1+x)}{a+x}e^{A(x)}$.

On a facilement $A(x)=\ln|a+x|$. Ainsi $C(x)=\displaystyle\int\frac{1+\ln(1+x)}{a+x}e^{\ln|a+x|}=\int\frac{1+\ln(1+x)}{a+x}|a+x|$. Deux cas :

$x+a>0$: on a $C(x)=\displaystyle\int(1+\ln(1+x))dx=\int(1+\ln y)dy=y+(y\ln y-y)=(x+1)\ln(x+1)$ d'où

$$\boxed{\forall x\in]-a,+\infty[\cap]-1,+\infty[,\ y=((x+1)\ln(x+1)+\lambda)\frac{1}{a+x}},\lambda\in\mathbb{R}$$

$x+a<0$: dans ce cas seuls quelques signes changent et on obtient

$$\boxed{\forall x\in]-\infty,-a[\cap]-1,+\infty[,\ y=((x+1)\ln(x+1)-\lambda)\frac{1}{a+x}},\lambda\in\mathbb{R}$$

ce qui, comme λ est quelconque, donne le même ensemble de fonctions solutions que dans le cas $x+a>0$...

2. $y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$

Corrigé :

avec un changement de variable $y = e^x$ pour calculer C (voir exo précédent), on obtient

$$\boxed{y(x) = (\ln(1+e^x) + \lambda)e^{-x}, , \lambda \in \mathbb{R}}$$

3. $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$

Corrigé :

$$\boxed{y(x) = \cos x + \lambda \sin x}$$

4. $2xy' + y = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}$

Corrigé :

$$\boxed{y(x) = \frac{x^n}{2n+1} + \frac{\lambda}{\sqrt{x}}}$$

5. $(x \ln x)y' - y = -\dfrac{1}{x}(\ln x + 1)$

Exercice 3
Résoudre

$$2x\frac{y'}{y} + \ln y = 1$$

Corrigé :

L'équation n'est pas linéaire... mais poser $z = \ln y$ ramène à une équation linéaire.

Exercice 4

Un corps (un oeuf) à température $T = 24°C$ est plongé au temps $t = 0$ dans un milieu (une casserole d'eau) à température $T_0 = 100°C$. Sa température suit la loi de Newton :

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$$

où $k > 0$.

a) Sachant que l'oeuf est cuit *à la coque* au bout de 3mn, et qu'il est alors à $62°C$ (température de coagulation du blanc, alors que le jaune coagule à $68°C$), déterminer k.

b) Au sommet de l'Everest, l'eau bout à $72°C$. Combien de temps faut-il pour y faire cuire un oeuf à la coque ? Même question à une altitude de 2000m, où l'eau bout à $93°C$.

Exercice 5

Résoudre

1. $(1-x)^2y' = (2-x)y$ sur $I =]-\infty, 1[$
2. $(1+x)^2y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
3. Démontrer, sans la résoudre, que l'équation $y' + 2xy - 1 = 0$ admet une unique solution impaire ($I = \mathbb{R}$).
4. $y' - xy = xe^{x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$