TD arithmétique

Exercice 1
(3694)
Division de puissances
Démontrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

Exercice 2
(3698)
Une relation de divisibilité
Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

Exercice 3
(3703)
Suite récurrente linéaire
Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $(3 - \sqrt{5})^n + (3 + \sqrt{5})^n$ est divisible par 2^n.

Exercice 4
(3704)
Pour bien commencer...
Calculer $(3^{123} - 5) \wedge 25$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $6|n(n+1)(n+2)$.

Exercice 5
(3708)
Calculs de pgcd
Soient $n \in \mathbb{Z}$. Calculer les pgcd suivants :

1. $(n^2 + n) \wedge (2n + 1)$ **2**. $(15n^2 + 8n + 6) \wedge (30n^2 + 21n + 13)$

Exercice 6
(3710)
Pas de solutions rationnelles
Montrer que l'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 7
(3726)
Théorème de Kurshchak
Soit $n \geq 2$ un entier et $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Démontrer que S_n n'est jamais un entier.

Exercice 8
(3727)
Puissances itérées
Déterminer, suivant les puissances de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
Quel est le reste de la division par 5 de 1357^{2013} ?

Exercice 9

(3734)
Congruences simultanée - Problème du cuisiner chinois

Soient n, m, c trois entiers tels que $n \wedge m = 1$. Montrer que l'équation $nx \equiv c\ [m]$ admet une unique solution modulo m.

Soient n, m, a, b quatre entiers avec $n \wedge m = 1$. Montrer que le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & a\ [n] \\ x & \equiv & b\ [m]. \end{array} \right.$$

admet une unique solution modulo nm.

Un phare émet un signal jaune toutes les 15 secondes et un signal rouge toutes les 28 secondes. On aperçoit le signal jaune 2 secondes après minuit et le rouge 8 secondes après minuit. A quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?

Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se les partager également et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors trois pièces. Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Le cuisinier recevrait alors quatre pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, six pirates et le cuisinier sont sauvés et le partage laisserait cinq pièces d'or à ce dernier. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier quand il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 10
(675)

Soient a et b premiers entre eux.
Montrer que $a \wedge (a+b) = b \wedge (a+b) = 1$ puis $(a+b) \wedge ab = 1$.

Exercice 11
(676)

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. On suppose $a \wedge b = 1$. Montrer que $(a+b) \wedge ab = 1$.
2. On revient au cas général. Calculer $pgcd(a+b, ppcm(a,b))$.

Exercice 12
(677)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1. $(n^2+n) \wedge (2n+1) = 1$
2. $(3n^2+2n) \wedge (n+1) = 1$

Exercice 13
(678)

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $n+1$ et $2n+1$ sont premiers entre eux.
En déduire

$$n+1 \mid \binom{2n}{n}$$

Exercice 14
(679)

Soient a et b premiers entre eux et $c \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $pgcd(a, bc) = pgcd(a, c)$.

Exercice 15
(680)
Soient a et b deux entiers premiers entre eux non nuls.
Notre but est de déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$.

1. Justifier l'existence d'au moins un couple solution (u_0, v_0).
2. Montrer que tout autre couple solution est de la forme $(u_0 + kb, v_0 - ka)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
3. Conclure.

Exercice 16
(681)

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un couple unique $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que
$$(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
2. Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.
3. En déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 17
(684)
[Théorème d'Aubry] Soit N un entier strictement positif.
On suppose que le cercle d'équation $x^2 + y^2 = N$ possède un point rationnel (x_0, y_0).
On introduit (x'_0, y'_0) un point entier obtenu par arrondi de (x_0, y_0).
En étudiant l'intersection du cercle avec la droite joignant (x_0, y_0) et (x'_0, y'_0), montrer que le cercle contient un point entier (x_1, y_1).

Exercice 18
(686)
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer
$$\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \iff \exists m \in \mathbb{N}, n = m^2$$
En déduire que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 19
(693)
Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a^2 \mid b^2$. Montrer que $a \mid b$.

Exercice 20
(696)
On divise un cercle en n arcs égaux et on joint les points de division de p en p jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ. Quel est le nombre de côtés du polygone construit ?

Exercice 21
(697)
Soient des entiers $a > 1$ et $n > 0$.

Montrer que si $a^n + 1$ est premier alors n est une puissance de 2.

Exercice 22
(699)
Montrer que les nombres suivants sont composés :

1. $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
2. $n^4 - n^2 + 16$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 23
(702)
Justifier l'existence de 1 000 entiers consécutifs sans nombres premiers.

Exercice 24
(705)
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Montrer, si $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \neq m$, que $F_n \wedge F_m = 1$.
2. Retrouver à l'aide du a) le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 25
(711)
[Nombres de Carmichael] Soit n un entier supérieur à 2.
On suppose que n pour tout facteur premier p de n, p^2 ne divise pas n mais $p - 1$ divise $n - 1$.
Établir

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a^n \equiv a \quad [n]$$

Exercice 26
(715)
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $x - 1 \mid x + 3$ b) $x + 2 \mid x^2 + 2$.