TD matrices et systèmes linéaires

Exercice 1
(3956)
Commutant

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 2
(3957)
Annulateur

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC. Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle).

Exercice 3
(3958)
Produit non commutatif

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 4
(3959)
Puissance n-ième, par récurrence

Calculer la puissance n-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5
(3960)
Puissance n-ième - avec la formule du binôme

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 6
(3963)
Inverser une matrice sans calculs !

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 7
(3964)
Inverse avec calculs !

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix},$$

Exercice 8
(3966)
Matrice nilpotente

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $p \geq 1$ tel que $A^p = 0$. Démontrer que la matrice $I_n - A$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 9
(3967)
Matrices stochastiques

Pour $n \geq 1$, on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $a_{i,j} \geq 0$ pour tout i, j et

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Démontrer que $\mathcal{D}$ est stable par produit.

Déterminer les matrices A de $\mathcal{D}$ qui sont inversibles et telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

Exercice 10
(3969)
Avec un paramètre

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11
(3987)
D'un produit à l'autre

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ tels que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que $BA = I_2$.

Exercice 12
(3500)
Sans problèmes

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 13
(3501)
Trop d'inconnues ou d'équations

Résoudre les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z-3t & = & 1 \\ 2x+y-z+t & = & -1 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y-3z & = & 4 \\ x+3y-z & = & 11 \\ 2x+5y-5z & = & 13 \\ x+4y+z & = & 18 \end{array} \right.$$

Exercice 14
(3503)
Paramètre dans le second membre

Discuter suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$ le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 1 \\ x-2y+2z & = & m \\ x+y-z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 15
(3505)
Paramètre partout

Discuter suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+(1-a)y+(1-a)z & = & a^2 \\ ax+(1+a)y+(1+a)z & = & a-a^2 \\ x+y+z & = & 1-a \end{array} \right.$$

Exercice 16
(3506)
Nature de l'ensemble des solutions

Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le nombre de solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x-my+m^2z & = & m \\ mx-m^2y+mz & = & 1 \\ mx+y-m^3z & = & -1 \end{array} \right.$$

Exercice 17
(3507)
Plein de cas !

Étudier l'existence de solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & by & + & az & = & 1 \\ ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \end{array} \right.$$

Exercice 18
(3508)
Fraction rationnelle avec décomposition en éléments simples

Soit $f(x) = \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1,+\infty[$.

Démontrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

En déduire la primitive de f sur $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2.

2