Corrigé
TD matrices et systèmes linéaires

Exercice 1
(3956)
Soit $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ une telle matrice. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ ae & af \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} ac & bc+da \\ ae & be+af \end{pmatrix}.$$

Puisque $AB = BA$, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ac+be & = & ac \\ ad+bf & = & bc+da \\ af & = & be+af \end{array} \right.$$

On résoud ce système pour trouver que $e = 0$ et $c = f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont celles de la forme :

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 2
(3957)
On trouve :

$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas inversible : si tel était le cas, on multiplierait à gauche par A^{-1} dans l'égalité $AB = AC$, et on trouverait $B = C$. Ce n'est pas le cas ! Pour la seconde partie, on considère F une matrice vérifiant les propriétés précitées :

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Le calcul de AF donne :

$$AF = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix}.$$

Puisque $AF = 0$, on a le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a=b=c=0 \\ d+g=e+h=f+i=0 \\ 3a+d+g=3b+e+h=3c+f+i=0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a=b=c=0 \\ d=-g \\ e=-h \\ f=-i \end{array} \right.$$

Les matrices F recherchées sont donc les matrices de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}.$$

Exercice 3
(3958)
Les matrices
$$A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$
conviennent.

Exercice 4
(3959)
On va commencer par calculer les premiers termes de A^n pour essayer de deviner la formule. On a
$$A^2=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}.$$
On démontre alors par récurrence sur $n\geq 1$ que
$$A^n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&-2^{n-1}\\-2^{n-1}&2^{n-1}\end{pmatrix}.$$
La preuve par récurrence est très simple, et repose simplement sur le fait que $2^{n-1}+2^{n-1}=2^n$.
 On fait la même chose pour B :
$$B^2=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\end{pmatrix},\ B^3=\begin{pmatrix}1&7\\0&8\end{pmatrix}.$$
On démontre alors, par récurrence sur n, que
$$B^n=\begin{pmatrix}1&2^n-1\\0&2^n\end{pmatrix}.$$

Exercice 5
(3960)
On commence par calculer les premières valeurs de B^n. On a
$$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad B^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
On en déduit alors par récurrence que, pour tout $n\geq 3$, on a $B^n=0$. En effet, c'est vrai pour $n=3$. Si c'est vrai au rang $n\geq 3$, alors
$$B^{n+1}=B^n\times B=0\times B=0.$$
Pour obtenir A, on écrit $A=I+B$ et on remarque que I et B commutent puisque $IB=BI=B$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton, ce qui est très facile ici puisque $B^n=0$ dès que $n\geq 3$. On en déduit
$$A^n=I^n+\binom{n}{1}I^{n-1}B+\binom{n}{2}I^{n-2}B^2$$
ce qui se réécrit en
$$A^n=I+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

On a donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6
(3963)

Le calcul ne pose pas de problèmes. Il mène à :

$$\frac{A^2+A}{2} = I \implies A\frac{A+I}{2} = \frac{A+I}{2}A = I.$$

A est inversible, et son inverse est :

$$\frac{A+I}{2}.$$

Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. On réécrit ceci en :

$$A(A - 3I_3) = -2I_3 \iff A\left(\frac{-1}{2}(A - 3I_3)\right) = I_3.$$

Ainsi, A est inversible et son inverse est $\frac{-1}{2}(A - 3I_3)$.

Exercice 7
(3964)

On utilise la méthode du pivot de Gauss. Commençons par A.

$$\begin{array}{rc|c}
 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{r} L_2 - L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
L_3 + L_2 \to L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparait à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que A est inversible. On trouve son inverse en poursuivant la méthode.

$$
\begin{array}{rc|c}
\frac{-1}{4}L_3 \to L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} L_1 - 2L_3 \to L_1 \\ L_2 + L_3 \to L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix} \\
L_1 - L_2 \to L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La matrice inverse recherchée est donc :

$$
\begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ 3/4 & -1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.
$$

On suit la même méthode pour B. On forme

$$
\begin{array}{rc|c}
 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} L_2 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparait à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que B est inversible. On trouve son inverse en poursuivant la méthode.

$$
\begin{array}{rc|c}
\begin{array}{c} L_1 + 2L_3 \to L_1 \\ L_2 + 2L_3 \to L_2 \\ -L_3 \to L_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
L_1 - L_2 \to L_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La matrice inverse recherchée est donc :

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Passons à C :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 3L_1 \to L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_2 \to L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La matrice C n'est donc pas inversible.
 Étudions maintenant I :

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{c} L_3 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{c} \\ L_2 + iL_1 \to L_2 \\ L_3 + 2L_1 \to L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3i \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La matrice I est donc inversible. Pour calculer son inverse, on poursuit la méthode :

$$\begin{array}{c} \\ \\ L_3/4 \to L_3 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{c} L_1 - L_3 \to L_1 \\ L_2 - 3iL_3 \to L_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ 1 & -3i/4 & -i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{c} -L_1 \to L_1 \\ -L_2 \to L_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right.$$

L'inverse de I est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8
(3966)
L'idée est que, si $x < 1$, on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

La même chose va se produire pour les matrices grâce au fait que $A^p = 0$. En effet, on a

$$\begin{aligned}(I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{p-1}) &= I_n - A + A - A^2 + A^2 + \cdots + A^{p-1} - A^p \\ &= I_n - A^p \\ &= I_n.\end{aligned}$$

On en déduit que $I_n - A$ est inversible, d'inverse $I_n + A + \cdots + A^{p-1}$.

Exercice 9
(3967)

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux éléments de $\mathcal{D}$ et soit $C = AB$ leur produit. Alors, clairement on a

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geq 0$$

car tout est positif. De plus, pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \\ &= 1\end{aligned}$$

Supposons que $A \in \mathcal{D}$ est inversible d'inverse $B \in \mathcal{D}$. Soient $i \neq j$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Alors le calcul du coefficient en (i, j) de BA donne

$$\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j} = 0.$$

Tous les termes étant positifs, ils sont tous nuls. On a donc, pour tout entier k,

$$b_{i,k} a_{k,j} = 0.$$

Choisissons i tel que $b_{i,1} \neq 0$. Alors on a $a_{1,j} = 0$ pour tout $j \neq i$. Autrement dit, la matrice A a au plus un coefficient non nul dans chaque ligne. Mais la somme des éléments de chaque ligne de A valant 1, ce coefficient vaut forcément 1. Ainsi, A est une matrice n'ayant qu'un seul 1 sur chaque ligne. La matrice A étant inversible, ces 1 sont sur chaque ligne dans une colonne différente. A est ce que l'on appelle une matrice de permutation. Réciproquement, il est clair qu'une telle matrice est élément de $\mathcal{D}$, est inversible et que son inverse est élément de $\mathcal{D}$.

Exercice 10
(3969)

On effectue les opérations suivantes :

$$L_2 - aL_1 \to L_2,\ L_3 - a^2 L_1 \to L_3,\ L_4 - a^3 L_1 \to L_4$$

et A a même rang que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^4 \\ 0 & 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) \\ 0 & 1 - a^4 & a(1 - a^4) & a^2(1 - a^4) \end{pmatrix}.$$

On échange ensuite L_2 et L_4 et on trouve que A a même rang que

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) & a^2(1-a^4) \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice triangulaire, dont les pivots sont non nuls si $1-a^4 \neq 0$, ie si $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la matrice est de rang 4. Si $a = 1$ ou $a = -1$, la matrice A a même rang qu'une matrice dont une seule ligne est non-nulle. Elle a donc pour rang 1.

Exercice 11
(3987)

On note f et g les applications linaires de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ pour f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ pour g, canoniquement associées à f et g. Alors, on sait que

$$fg(e_2) = e_2,\ fg(e_3) = e_3.$$

Il vient

$$gf(g(e_2))) = g(e_2) \text{ et } gf(g(e_3)) = g(e_3).$$

De plus, $(g(e_2), g(e_3))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$. En effet, si on a

$$ag(e_2) + bg(e_3) = 0,$$

on compose par f et on trouve que $ae_2 + be_3 = 0$, d'où $a = b = 0$.
 Ainsi, $(g(e_2), g(e_3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$, et gf laisse invariant les vecteurs de cette base. Autrement dit, gf est l'identité de $\mathbb{R}^2$ est $BA = I_2$.

Exercice 12
(3500)

On va utiliser la méthode du pivot de Gauss. Pour le premier système, on écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z & = & 3 & \\ y-z & = & -2 & L_2 - L_1 \to L_2 \\ -y-3z & = & -6 & L_3 - 2L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y+2z & = & 3 & \\ y-z & = & -2 & \\ -4z & = & -8 & L_3 + L_2 \to L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 2 \end{array}\right.$$

Pour le second système, on procède de la même façon :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2z & = & 1 \\ -y+z & = & 2 \\ x-2y & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2z & = & 1 & \\ -y+z & = & 2 & \\ -2y-2z & = & 0 & L_3 - L_1 \to L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2z & = & 1 & \\ -y+z & = & 2 & \\ -4z & = & -4 & L_3 - 2L_2 \to L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & -1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 13
(3501)
Pour le premier système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t &=& 1\\ 2x+y-z+t &=& -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t &=& 1\\ -y-3z+7t &=& -3\end{array}\right.$$

Le système est triangulaire, et il y a plus d'inconnues que d'équations. On va donc exprimer certaines inconnues en fonctions des autres. Par exemple, ici, on peut exprimer x et y en fonction de z et t. Le système devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z-3t &=& 1\\ -y-3z+7t &=& -3\\ z &=& z\\ t &=& t\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2z-4t-2\\ y &=& -3z+7t+3\\ z &=& z\\ t &=& t\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S}=\left\{(2z-4t-2,-3z+7t+3,z,t);\ (z,t)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour le second système, on écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-3z &=& 4\\ x+3y-z &=& 11\\ 2x+5y-5z &=& 13\\ x+4y+z &=& 18\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y-3z &=& 4 &\\ y+2z &=& 7 & L_2-L_1\to L_2\\ y+z &=& 5 & L_3-2L_1\to L_3\\ 2y+4z &=& 14 & L_4-L_1\to L_4\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+2y-3z &=& 4 &\\ y+2z &=& 7 &\\ -z &=& -2 & L_3-L_2\to L_3\\ 0 &=& 0 & L_4-L_2\to L_4\end{array}\right.$$

La dernière relation de compatibilité est vérifiée. On en déduit alors facilement que l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}=\{(4,3,2)\}.$$

Exercice 14
(3503)
Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss. On choisit la troisième ligne comme pivot :

$$(S)\iff \left\{\begin{array}{rcll} x+y-z &=& 1 & \text{(L3)}\\ -3y+3z &=& m-1 & \text{(L1)-3(L3)}\\ -2y+2z &=& -2 & \text{(L2)-(L3)}\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y-z &=& 1\\ -y+z &=& (m-1)/3\\ -y+z &=& -1\end{array}\right.$$

Le système admet donc des solutions si et seulement si $(m-1)/3=-1$, soit $m=-2$. Dans ce cas, il est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-y+z\\ z &=& -1+y\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& y\\ z &=& -1+y\end{array}\right.$$

Dans le cas où $m=-2$, l'ensemble des solutions est donc

$$\{(0,y,-1+y);\ y\in\mathbb{R}\}.$$

Exercice 15

(3505)

Notons (S) ce système, et appliquons la méthode du pivot de Gauss en choisissant la troisième ligne comme pivot :

$$(S)\iff\left\{\begin{array}{rcll} x+y+z&=&1-a & L_3\\ y+z&=&0 & L_2-aL_3\\ (1-2a)y+(1-2a)z&=&2a^2-a & L_1-aL_3\end{array}\right.$$
$$\iff\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z&=&1-a\\ y+z&=&0\\ a(2a-1)&=&0\end{array}\right.$$

On distingue alors plusieurs cas. Si $a\notin\{0,1/2\}$, le système n'est pas compatible et n'admet donc pas de solutions. Si $a=0$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z&=&1\\ y+z&=&0\end{array}\right.$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1,y,-y);\ y\in\mathbb{R}\}$. Si $a=1/2$, le système devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z&=&1/2\\ y+z&=&0\end{array}\right.$$

et donc l'ensemble des solutions est $\{(1/2,y,-y);\ y\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 16

(3506)

On applique la méthode du pivot de Gauss et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-my+m^2z&=&m\\ mx-m^2y+mz&=&1\\ mx+y-m^3z&=&-1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcll} x-my+m^2z&=&m & \\ (m-m^3)z&=&1-m^2 & L_2-mL_1\to L_2\\ (1+m^2)y-2m^3z&=&-1-m^2 & L_3-mL_1\to L_3\end{array}\right.$$

On discute alors suivant la valeur de m. Si $m=0$, la deuxième ligne devient $0=-1$, et le système est incompatible : il n'admet pas de solutions. Si $m=1$ ou $m=-1$, la deuxième ligne devient $0=0$. Le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-my+m^2z&=&m\\ 2y-2m^3z&=&-2\end{array}\right.$$

Dans ce cas, le système admet une infinité de solutions. L'ensemble des solutions est une droite de $\mathbb{R}^3$.
 Supposons maintenant $m\neq 0,\pm1$. Le système est alors équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-my+m^2z&=&m\\ z&=&\dfrac{1}{m}\\ (1+m^2)y&=&-1-m^2+2m^2\end{array}\right.$$

Il faut encore discuter : si $m\neq\pm i$, alors on peut déterminer y et le système admet une unique solution. Si $m=\pm i$, la dernière ligne devient $0=-2$, et le système est incompatible.
 En résumé, le système : <ul class="rien">

admet une unique solution si $m \neq 0, \pm 1, \pm i$;
admet une infinité de solutions (une droite de $\mathbb{R}^3$) si $m = \pm 1$;
n'admet pas de solutions si $m = 0, \pm i$.

Exercice 17
(3507)
On applique la méthode du pivot en notant (S) le système initial :

$$(S)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll} x & + & by & + & az & = & 1 & L_1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ & & b(1-a)y & + & (1-a^2)z & = & 1-a & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & by & + & az & = & 1 \\ & & b(a-1)y & + & (1-a)z & = & b-1 \\ & & & & (2-a-a^2)z & = & b-a \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & & & & & & \end{array}\right.$$

Nous allons maintenant discuter de l'existence des solutions. Remarquons d'abord que $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$. Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ alors $2-a-a^2 \neq 0$ donc $z = \dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)}$. On a donc trouvé la valeur de z. La deuxième ligne du système triangulaire est $b(a-1)y + (1-a)z = b-1$. Or, on sait déjà $a-1 \neq 0$. Si $b \neq 0$ alors, en reportant la valeur de z obtenue, on trouve la valeur $y = \dfrac{b-1-(1-a)z}{b(a-1)}$. Puis avec la première ligne on en déduit aussi $x = 1 - by - az$.

Donc si $a \neq 1$ et $a \neq -2$ et $b \neq 0$ alors il existe une unique solution (x, y, z).

Il faut maintenant s'occuper des cas particuliers. <ul class="rien">

Si $a = 1$ alors notre système triangulaire devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & by & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b-1 \end{array}\right.$$

Si $b \neq 1$ il n'y a pas de solution. Si $a = 1$ et $b = 1$ alors il ne reste plus que l'équation $x + y + z = 1$. On choisit par exemple y, z comme paramètres, l'ensemble des solutions est

$$\left\{(1-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si $a = -2$ alors le système triangulaire devient :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & by & - & 2z & = & 1 \\ & & -3by & + & 3z & = & b-1 \\ & & & & 0 & = & b+2 \end{array}\right.$$

Donc si $b \neq -2$ il n'y a pas de solution. Si $a = -2$ et $b = -2$ alors le système est

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & 2z & = & 1 \\ & & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Si l'on choisit y comme paramètre alors il y a une infinité de solutions

$$\left\{(-1-2y, y, -1-2y) \mid y \in \mathbb{R}\right\}.$$

Enfin si $b=0$ alors la deuxième et troisième ligne du système triangulaire sont : $(1-a)z=-1$ et $(2-a-a^2)z=-a$. Donc $z=\dfrac{-1}{1-a}=\dfrac{-a}{2-a-a^2}$ (le sous-cas $b=0$ et $a=1$ n'a pas de solution). Dans tous les cas il n'y a pas de solution.

Conclusion : <ul class="rien">

Si $a\neq 1$ et $a\neq -2$ et $b\neq 0$, le système admet une unique solution.

Si $a=1$ et $b\neq 1$ il n'y a pas de solution (le système n'est pas compatible).

Si $a=1$ et $b=1$ il y a une infinité de solutions (qui forment un plan dans $\mathbb{R}^3$).

Si $a=-2$ et $b\neq -2$ il n'y a pas de solution.

Si $a=-2$ et $b=-2$ il y a une infinité de solutions (qui forment une droite dans $\mathbb{R}^3$).

Si $b=0$ il n'y a pas de solution.

Exercice 18
(3508)

On peut tout mettre au même dénominateur, et procéder par identification. En effet, on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{(x+3)^2} &= \frac{a(x+3)^2+b(x-1)(x+3)+c(x-1)}{(x-1)(x+3)^2}\\ &= \frac{x^2(a+b)+x(6a+2b+c)+(9a-3b-c)}{(x-1)(x+3)^2}.\end{aligned}$$

L'égalité demandée sera vérifiée dès que

$$\begin{cases} a+b &= 5\\ 6a+2b+c &= 21\\ 9a-3b-c &= 22\end{cases}$$

On résoud ce système en commençant par remarquer que $a=5-b$. Il est donc successivement équivalent à

$$\begin{cases} a &= 5-b\\ -4b+c &= -9\\ -12b-c &= -23\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a &= 5-b\\ c &= -9+4b\\ -16b &= -32\end{cases}$$

On trouve finalement comme unique solution $a=3$, $b=2$ et $c=-1$, de sorte que

$$f(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}.$$

On intègre chacun des éléments simples de la décomposition précédente, en tenant compte du fait que l'on travaille sur l'intervalle $]1,+\infty[$. Les primitives de f sur cet intervalle sont donc les fonctions

$$F(x)=3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}+d.$$

La primitive qui s'annule en 2 et celle pour laquelle d vérifie l'équation

$$3\ln(1)+2\ln 5+\frac{1}{5}+d=0.$$

La primitive de f sur l'intervalle $]1,+\infty[$ qui s'annule en 2 est donc la fonction F définie par

$$F(x)=3\ln(x-1)+2\ln(x+3)+\frac{1}{x+3}-2\ln 5-\frac{1}{5}.$$