TD reels

Exercice 1
(4143)
Des exemples

Les ensembles suivants sont-ils majorés? minorés? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 2\} \qquad B = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p};\ (p, n) \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 2
(4144)
Une somme

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2010} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

Exercice 3
(4146)
Partie entière et somme

Soient a, b deux réels. Prouver que

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1.$$

Exercice 4
(4147)
Produit et division

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 5
(4149)
Somme décalée

Soit x un nombre réel.

Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

Plus généralement, démontrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 6
(4151)
Quelques exemples

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leurs bornes supérieures, inférieures.

1. $\{a+bn;\ n\in\mathbb{N}\}$ **2**. $\{a+(-1)^n b;\ n\in\mathbb{N}\}$
3. $\{a+b/n;\ n\in\mathbb{N}^*\}$ **4**. $\{(-1)^n a+b/n;\ n\in\mathbb{N}^*\}$
5. $\{a+(-1)^n b/n;\ n\in\mathbb{N}^*\}$.

Exercice 7
(4152)
Des exemples

Les ensembles suivants sont-ils majorés ? minorés ? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A=\{x\in\mathbb{R};\ x^2<2\} \qquad B=\left\{\frac{1}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$$
$$C=\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{p};\ (p,n)\in\mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 8
(4153)
Atteint ou non ?

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont elles-minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A=\left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n)\in\mathbb{N}^{*2}\right\}, \qquad B=\left\{\frac{n}{mn+1};\ (m,n)\in\mathbb{N}^2\right\}.$$

Exercice 9
(4156)
Diverses opérations

Soient A et B deux parties non-vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $x\in\mathbb{R}$. On note

$$-A=\{-a;\ a\in A\} \qquad A+B=\{a+b;\ a\in A, b\in B\}$$
$$x+A=\{x+a;\ a\in A\} \qquad AB=\{ab;\ a\in A, b\in B\}.$$

Montrer que $\sup(-A)=-\inf(A)$.
Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.
Montrer que $\sup(x+A)=x+\sup(A)$.
A-t-on toujours $\sup(AB)=\sup(A)\times\sup(B)$? Quelle hypothèse peut-on ajouter pour que cela soit vrai ?

Exercice 10
(4159)
Application à l'existence d'un point fixe d'une application croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ une application croissante. On note $E=\{x\in[0,1]; f(x)\geq x\}$.
Montrer que E admet une borne supérieure b.
Prouver que $f(b)=b$.

Exercice 11
(4160)
Irrationnels !

Démontrer que les réels suivants sont irrationels :
$\sqrt{x}+\sqrt{y}$ où x et y sont des rationnels positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels.
$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Exercice 12
(4161)
Intervalles et rationnels

Soient I et J deux intervalles ouverts. On suppose que $(I\cap\mathbb{Q})\cap(J\cap\mathbb{Q})=\varnothing$. Démontrer que $I\cap J=\varnothing$.