Corrigé
TD reels

Exercice 1
(4143)

<ul class="rien">
On a $x^2 < 2 \iff -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ et A n'est rien d'autre que l'intervalle $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. C'est un intervalle borné, dont la borne inférieure est $-\sqrt{2}$ et dont la borne supérieure est $\sqrt{2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq 1.$$

Ainsi, B est minoré par 0 et majoré par 1. De plus, $1 \in B$, dont 1 est un majorant de B qui est élément de B. C'est donc sa borne supérieure. Enfin, prouvons que 0 est la borne inférieure de A. Pour cela, on remarque que, pour tout > 0, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n} < .$$

Comme 0 est un minorant de B, ceci prouve que 0 est la borne inférieure de B.

Le raisonnement est encore une fois très similaire. On remarque d'abord que, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^*$, on a

$$-1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \leq 1.$$

Cette fois, ni 1 ni -1 ne sont atteints. Mais on peut s'en approcher aussi près qu'on veut, de sorte que ce sont bien les bornes supérieures et inférieures. Détaillons que $\sup C = 1$. Choisissons > 0. On souhaite trouver $n,p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \geq 1 - .$$

Posons $n = 1$ et considérons p très grand de sorte que $\frac{1}{p} <$. Alors, on a effectivement

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \geq 1-,$$

et comme 1 est un majorant de C, on a $1 = \sup C$.

Exercice 2
(4144)

L'idée est très simple. Entre deux carrés parfaits consécutifs, la valeur de $\lfloor\sqrt{k}\rfloor$ est connue. Plus précisément, si $n^2 \leq k < (n+1)^2$, alors $\lfloor\sqrt{k}\rfloor = n$. De plus, entre deux carrés parfaits consécutifs, il y a exactement $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ entiers. Enfin, le plus grand carré inférieur ou égal à 2010 est $44^2 = 1936$. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2010} \lfloor\sqrt{k}\rfloor &= \sum_{n=1}^{43} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \lfloor\sqrt{k}\rfloor + \sum_{k=1936}^{2010} \lfloor\sqrt{k}\rfloor \\ &= \sum_{n=1}^{43} n(2n+1) + (2010 - 1936 + 1) \times 44.\end{aligned}$$

On calcule ces sommes, sachant que $\sum_{n=1}^{p} n^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$ et on trouve finalement que la somme fait 59144.

Exercice 3
(4146)
Des inégalités $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ et $\lfloor b \rfloor \leq b < \lfloor b \rfloor + 1$, on en déduit

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a + b < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2.$$

Or, $\lfloor a+b \rfloor$ est le plus grand entier n tel que $n \leq a+b$. Puisque $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a+b$, on en déduit qu $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a+b \rfloor$. De même, $\lfloor a+b \rfloor + 1$ est le plus petit entier m tel que $m > a+b$. Puisque $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2 > a+b$, on en déduit $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2 \geq \lfloor a+b \rfloor + 1$, ce qui est l'autre inégalité demandée.

Exercice 4
(4147)
D'une part on a $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ donc

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

et puisque la fonction partie entière est croissante :

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leq \lfloor x \rfloor.$$

D'autre part, on a $\lfloor x \rfloor \leq x$ donc $n\lfloor x \rfloor \leq nx$ ou encore

$$\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor.$$

Maintenant, puisque $n\lfloor x \rfloor$ est un entier, $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ et donc

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

En reprenant la partie entière de cette inégalité, on trouve

$$\lfloor x \rfloor \leq \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$$

ce qui est l'autre inégalité désirée.

Exercice 5
(4149)

Notons $k = \lfloor x \rfloor$ et distinguons deux cas : <ul class="rien">
Soit $k \leq x < k + 1/2$. Dans ce cas, $k + 1/2 \leq x + \frac{1}{2} < k+1$ et $2k \leq 2x < 2k+1$ ce qui prouve que

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = k \text{ et } \lfloor 2x \rfloor = 2k.$$

Dans ce cas, la formule demandée est bien prouvée.
Soit $k + \frac{1}{2} \leq x < k+1$. Dans ce cas, $k+1 \leq x + \frac{1}{2} < k+1$ et $2k+1 \leq 2x < 2k+2$ ce qui prouve que

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = k+1 \text{ et } \lfloor 2x \rfloor = 2k+1.$$

Dans ce cas également, la formule demandée est bien prouvée.

On pourrait procéder de la même façon, en encadrant x entre $k+p/n$ et $k+(p+1)/n$. Voici une autre démonstration possible. Posons

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor-\lfloor nx\rfloor.$$

Alors f est périodique de période $1/n$. En effet,

$$f(x+1/n)=\sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor+\lfloor x+1\rfloor-\lfloor nx+1\rfloor=f(x).$$

De plus, si x est dans l'intervalle $[0,1/n[$, alors on peut vérifier que f est nulle (toutes les parties entières intervenant dans sa définition le sont). Par périodicité, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

(4151)

Dans la suite, on notera A l'ensemble considéré.

Les éléments de A sont a, $a+b$, $a+2b,\dots$. On a alors que A est minoré par a, et puisque $a\in A$, c'est la borne inférieure de A. A n'est pas majoré : on ne peut avoir $a+bn\leq M$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, sinon on aurait $n\leq (M-a)/b$ et $\mathbb{N}$ serait majoré.

Si n est pair, $a+(-1)^nb=a+b$ et si n est impair, $a+(-1)^nb=a-b$. L'ensemble est donc constitué des deux élements $a+b$ et $a-b$. Il est donc majoré, minoré, avec $\sup(A)=a+b$ et $\inf(A)=a-b$.

Les éléments successifs de A sont $a+b,a+b/2,a+b/3,\dots$. On voit facilement que A est majoré par $a+b$ et que A est minoré par a (on a bien $a\leq a+b/n\leq a+b$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$). De plus, $a+b$ est élément de A, et donc $\sup(A)=a+b$. Enfin, prouvons que a est la borne inférieure de A. Si c est un minorant de A strictement supérieur à a, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$a+\frac{b}{n}\geq c\iff n\leq\frac{b}{c-a}.$$

Comme $\mathbb{N}$ n'est pas majoré, c n'est pas un minorant de A. a est donc le plus grand des minorants de A, c'est sa borne inférieure.

Les éléments successifs de A sont $-a+b,a+b/2,-a+b/3,a+b/4,\dots$. On remarque que $-a$ est un minorant de A, et en utilisant le raisonnement précédent (mais en se limitant aux entiers impairs), on prouve que $-a=\inf(A)$. De plus, on a $-a+b\geq -a+b/n$ pour tout entier n impair et $a+b/2\geq a+b/n$ pour tout entier n pair. $\max(-a+b,a+b/2)$ est donc un majorant de A. C'est aussi un élément de A, donc c'est sa borne supérieure.

Les éléments successifs de A sont $a-b,a+b/2,a-b/3,\dots$. On prouve alors que $a-b$ est un minorant de A et que $a+b/2$ est un majorant de A. Comme ils sont tous les deux élements de A, ce sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de A.

Exercice 7

(4152)

<ul class="rien">

On a $x^2<2\iff -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ et A n'est rien d'autre que l'intervalle $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. C'est un intervalle borné, dont la borne inférieure est $-\sqrt{2}$ et dont la borne supérieure est $\sqrt{2}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$0\leq\frac{1}{n}\leq 1.$$

Ainsi, B est minoré par 0 et majoré par 1. De plus, $1\in B$, dont 1 est un majorant de B qui est élément de B. C'est donc sa borne supérieure. Enfin, prouvons que 0 est la borne inférieure de A. Pour cela, on remarque que, pour tout > 0, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{n} < .$$

Comme 0 est un minorant de B, ceci prouve que 0 est la borne inférieure de B.

Le raisonnement est encore une fois très similaire. On remarque d'abord que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^*$, on a

$$-1 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \leq 1.$$

Cette fois, ni 1 ni -1 ne sont atteints. Mais on peut s'en approcher aussi près qu'on veut, de sorte que ce sont bien les bornes supérieures et inférieures. Détaillons que $\sup C = 1$. Choisissons > 0. On souhaite trouver $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \geq 1 - .$$

Posons $n = 1$ et considérons p très grand de sorte que $\frac{1}{p} <$. Alors, on a effectivement

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \geq 1-,$$

et comme 1 est un majorant de C, on a $1 = \sup C$.

Exercice 8
(4153)

Commençons par A. On a, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{n}{nm+1} \leq \frac{n}{nm} \leq \frac{1}{m} \leq 1.$$

A est donc minorée par 0 et majorée par 1. Montrons que $\inf(A) = 0$. Si $c > 0$ est un minorant de A, alors pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a

$$c \leq \frac{n}{nm+1}.$$

Prenons $n = 1$, on obtient

$$c \leq \frac{1}{m+1} \iff m \leq \frac{1}{c} - 1.$$

Comme ceci doit être vrai pour tout entier $m \geq 1$, c'est une contradiction car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. Ainsi, 0 est le plus grand des minorants de A, et $\inf(A) = 0$. Démontrons de même que $1 = \sup(A)$. Si $d < 1$ est un majorant de A, alors pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a

$$d \geq \frac{n}{nm+1}.$$

Pour $m = 1$, on obtient

$$d \geq \frac{n}{n+1} \iff d \geq n(1-d) \iff n \leq \frac{d}{1-d}.$$

Cette inégalité est impossible à réaliser pour tout entier n, et donc $\sup(A) = 1$. De plus, 0 n'est pas un élément de A -c'est trivial, et 1 non plus car on a toujours $nm + 1 > n$ pour $n, m \geq 1$.
Étudions désormais B. 0 est toujours un minorant de B, mais cette fois il est aussi élément de B. On a donc $\inf(B) = \min(B) = 0$. De plus, on a $\mathbb{N} \subset B$ (choisir $m = 0$). Ainsi, B n'est pas majoré.

Exercice 9

(4156)

Soit $m = \inf(A)$ et notons $M = -m$. Alors, pour tout $a \in A$, on a $m \leq a$ ce qui implique $-a \leq M$. Ainsi, M majore $-A$. De plus, soit > 0. Alors il existe $a \in A$ tel que $m \leq a \leq m+$. Multipliant cette inégalité par -1, on trouve que

$$M- \leq -a \leq M.$$

C'est bien que $M = \sup(-A)$.

Notons $M = \sup(A) + \sup(B)$. Soit $x \in A + B$, x s'écrit $x = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Alors $a \leq \sup(A)$, $b \leq \sup(B)$ et donc en effectuant la somme, on trouve

$$a + b \leq M.$$

M est donc un majorant de $A + B$. De plus, soit > 0. Alors il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - /2 \leq a \leq \sup(A)$, et il existe $b \in A$ tel que $\sup(B) - /2 \leq b \leq \sup(B)$. Faisant la somme de ces deux inégalités, on trouve

$$M- \leq a + b \leq M.$$

Ceci achève la preuve que $M = \sup(A + B)$.

On peut reprendre le raisonnement précédent, ou tout simplement appliquer le résultat précédent avec $B = \{x\}$.

Le raisonnement utilisé aux questions précédentes ne marche pas ici, car le produit de deux nombres négatifs est un nombre positif. Prenons par exemple $A = \{-1, 0\}$ et $B = \{-2\}$. Alors $AB = \{0, 2\}$ et $\sup(AB) = 2 \neq \sup(A) \times \sup(B) = 0$. Le résultat est cependant vrai si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$. La preuve est tout à fait similaire à celle produite un peu plus haut pour la somme.

Exercice 10
(4159)

E est une partie non-vide (car elle contient 0), et majorée (par 1) de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure que l'on note b.

On va raisonner par l'absurde pour démontrer que $f(b) = b$. <ul class="rien">

Si $f(b) < b$, comme b est le plus petit des majorants de E, $f(b)$ ne majore pas E. Il existe donc un élément c de E tel que $f(b) < c \leq b$. Mais alors $f(c) \geq c > f(b)$ alors que $c \leq b$. Ceci contredit que f est croissante.

Si $f(b) > b$, comme f est croissante, on a $f(f(b)) \geq f(b)$, et donc $f(b) \in E$, ce qui est impossible puisque $f(b)$ est strictement supérieur à la borne supérieure de E.

Exercice 11
(4160)

Imaginons que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ soit un rationnel (non nul). Alors, on a

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

et donc $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ est aussi un rationnel. Écrivant

$$2\sqrt{x} = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}),$$

on trouve que $\sqrt{x}$ est rationnel, une contradiction.

Imaginons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ soit un rationnel $r > 0$. Alors on a

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = r - \sqrt{5} \implies 2 + 2\sqrt{6} + 3 = r^2 + 5 - 2r\sqrt{5}$$

et donc $r\sqrt{5}+\sqrt{6}$ est un rationnel. On raisonne alors comme à la question précédente pour prouver que la quantité conjuguée

$$r\sqrt{5} - \sqrt{6} = \frac{5r^2 - 6}{r\sqrt{5}+\sqrt{6}}$$

est aussi rationnel et donc que $\sqrt{6}$ l'est aussi. C'est la contradiction que l'on recherchait !

Exercice 12
(4161)
Supposons qu'il existe a dans $I \cap J$. Puisque $a \in I$, intervalle ouvert, il existe $r_1 > 0$ tel que $]a - r_1, a + r_1[\subset I$. De même, puisque $a \in J$, intervalle ouvert, il existe $r_2 > 0$ tel que $]a - r_2, a + r_2[\subset J$. Posons $r = \min(r_1, r_2)$. Alors :

$$]a - r, a + r[\subset I \cap J.$$

Mais dans l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$, il existe toujours un autre rationnel.
Une autre façon de rédiger les choses est de dire que l'intersection de deux intervalles ouverts est ou bien vide, ou bien un intervalle ouvert (question : quelles sont ses bornes ?). Dans un intervalle ouvert non réduit à un point, il y a toujours un rationnel.