TD suites

Exercice 1

(341)

Montrer que l'équation $xe^x = n$ possède pour tout $n \in \mathbb{N}$, une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
Étudier la limite de (x_n).

Exercice 2

(343)

Soit n un entier naturel non nul et E_n l'équation : $x^n \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que l'équation E_n admet une unique solution x_n, et que $x_n \geq 1$.
2. Montrer que la suite (x_n) est décroissante et converge vers 1.

Exercice 3

(344)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$E_n \colon x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$$

1. Montrer que l'équation E_n possède une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$ et que $x_n \in [1/2, 1]$
2. Montrer que (x_n) converge.
3. Déterminer la limite de (x_n).

Exercice 4

(349)

Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

1. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$
2. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$.

Exercice 5

(350)

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \ et \ y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + \mathrm{i}.y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 6

(351)

Soit (z_n) une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\overline{z}_n)$$

Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Exercice 7

(352)
Soit (u_n) et (v_n) les suites déterminées par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \textit{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)$ est constante.
2. Prouver que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
3. Exprimer les termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 8
(356)
Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :

1. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
2. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
3. $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$.

Exercice 9
(399)
Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \sqrt[n]{n}$
2. $u_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$
3. $u_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
4. $u_n = n^2\left(\cos\dfrac{1}{n} - \cos\dfrac{1}{n+1}\right)$
5. $u_n = \left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{n}\right)\right)^n$
6. $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$
7. $u_n = \left(\dfrac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{4}}{3}\right)^n$
8. $u_n = \left(\dfrac{\arctan(n+1)}{\arctan n}\right)^{n^2}$

Exercice 10
(401)
Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \dfrac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
3. $u_n = \dfrac{n - \sqrt{n^2+1}}{n + \sqrt{n^2-1}}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$

Exercice 11
(402)
Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
3. $u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n}$
4. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

Exercice 12
(404)
Déterminer les limites des sommes suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$
2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$
3. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2}$
4. $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$
5. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$
6. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$
7. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k!$

Exercice 13
(417)
Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ. On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

1. Montrer que (v_n) est croissante.
2. Établir que $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire que $v_n \to \ell$.