TD suites 2

Exercice 1
(3756)
Par encadrement
Etudier les suites (u_n) définies par

$$1.\ \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} \qquad 2.\ u_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}.$$

Exercice 2
(3758)
Nature
Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\mathbf{1}.\ u_n = \frac{\ln(n!)}{n} \qquad \mathbf{2}.\ u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^\alpha} \text{ en fonction de } x, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\mathbf{3}.\ u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$$

Exercice 3
(3759)
Vrai/Faux
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.
Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.

Exercice 4
(3762)
Somme
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que

$$\begin{cases} u_n \leq a,\ v_n \leq b \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_n + v_n \to a + b. \end{cases}$$

Montrer que (u_n) converge vers a et que (v_n) converge vers b.

Exercice 5
(3763)
Produit
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que

$$0 \leq u_n \leq 1,\ 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \to 1.$$

Que pouvez-vous dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Exercice 6
(3764)
Critère de d'Alembert

Soit (u_n) une suite à termes réels strictement positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers un réel l.

On suppose $l < 1$ et on fixe $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 1$.
Démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a

$$u_n \leq (l + \varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

En déduire que (u_n) converge vers 0.
On suppose $l > 1$. Démontrer que (u_n) converge vers $+\infty$.
Étudier le cas $l = 1$.

Exercice 7
(3766)
Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, tels que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On suppose que (v_n) converge vers 0. Montrer que (u_n) converge aussi vers 0.
On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de (v_n) ?

Exercice 8
(3767)
Moyenne de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle. On pose $S_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
On suppose que (u_n) converge vers 0. Soient > 0 et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq$.
Montrer qu'il existe une constante M telle que, pour $n \geq n_0$, on a

$$|S_n| \leq \frac{M(n_0 - 1)}{n} + .$$

En déduire que (S_n) converge vers 0.
On suppose que $u_n = (-1)^n$. Que dire de (S_n) ? Qu'en déduisez-vous ?
On suppose que (u_n) converge vers l. Montrer que (S_n) converge vers l.
On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Montrer que (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 9
(3771)
Suites extraites vérifiant certaines propriétes

Soit (u_n) une suite de nombre réels.
On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que dire de (u_n) ?
On suppose que (u_n) est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que dire de (u_n) ?
On suppose que (u_n) n'est pas majorée. Montrer qu'elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

Exercice 10

(3774)
Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4**. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Exercice 11

(3775)
Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \ln\left(2n^2 - n\right) - \ln(3n+1)$ **2**. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n},\ a, b \in]0, +\infty[$ **4**. $u_n = \dfrac{\ln(n + e^n)}{n}$

5. $u_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

Exercice 12

(3782)
Radicaux itérés

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}$.

Écrire une formule de récurrence liant u_{n-1} et u_n.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.

Déterminer sa limite.

Exercice 13

(3789)
Exemple de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$

2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 14

(3794)
Fonction décroissante - avec indications

Soit $f\ :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?

Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.

Démontrer que (w_n) est décroissante.

En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 15

(3795)

Fonction croissante - sans indication

Étudier les suites récurrentes suivantes :

$u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$;

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Que se passe-t-il si on choisit $u_0 = 2$?