TD suites 2

Exercice 1
(3784)

Un petit problème...

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Etudier les variations de f.

Montrer que, pour tout n, $0 < u_n < \dfrac{1}{n+1}$.

En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$, $n \geq 0$, est croissante.

Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à $]0,1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).

On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que (w_n) converge vers $l(1-l)$.

Soit (t_n) une autre suite telle qu'il existe $n_0 \geq 1$ vérifiant que, pour $n \geq n_0$, on a

$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n},$$

où $a > 0$. Montrer que $t_{2n} - t_n \geq \dfrac{a}{2}$ pour $n \geq n_0$, puis que (t_n) est divergente.

Montrer que si $l \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de l.

Exercice 2
(3785)

Somme télescopique

Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}.$$

En déduire la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$

Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}.$$

Exercice 3
(3792)

Approximation du nombre d'or

On appelle nombre d'or et on note ϕ la solution positive réelle de l'équation d'inconnue réelle x :

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

En particulier, on a $\phi = \sqrt{1+\phi}$.

Justifier, sans calculatrice, que $1 < \phi < 2$.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1 = \sqrt{1},\ u_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}},\ u_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1+\cdots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}$$

avec n radicaux.
 Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n.

Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq u_n \leq \phi.$$

Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démontrer que (u_n) converge vers ϕ.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n\breve{\ }\phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Écrire un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée de ϕ à près.

Exercice 4
(3793)

Fonction croissante - avec indications

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?

On suppose $u_0 \in [0, 1/4]$. Montrer que $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout n, puis que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Exercice 5

(3794)

Fonction décroissante - avec indications

Soit $f\ :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par $f(x) = 1+\dfrac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

Étudier le sens de variation de f sur $[1,3]$ et montrer que l'intervalle $[1,3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?

Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.

Démontrer que (w_n) est décroissante.

En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.

Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

Exercice 6

(3798)

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes :

$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 3$, $u_1 = 5$.

$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

$u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.