Corrigé
TD suites

Exercice 1
(341)
Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x\mathrm{e}^x$. f est dérivable et

$$f'(x)=(x+1)\,\mathrm{e}^x>0$$

donc f est strictement croissante. $f(0)=0$ et $\lim_{+\infty} f=+\infty$ donc l'équation $x\mathrm{e}^x=n$ possède une unique solution x_n .

$$x_n=f^{-1}(n)\to+\infty.$$

Exercice 2
(343)
(a) Le tableau de variation de $f_n:x\mapsto x^n\ln x$ permet d'affirmer que l'équation $f_n(x)=1$ possède une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+^*$ et que de plus $x_n\in[1;+\infty[$. (b)

$$1=x_{n+1}^{n+1}\ln x_{n+1}=x_{n+1}f_n(x_{n+1})$$

donc

$$f_n(x_{n+1})=\frac{1}{x_{n+1}}\le 1=f_n(x_n)$$

donc $x_{n+1}\le x_n$ car f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons $\updownarrow$ sa limite, on a $\updownarrow\ge 1$

Si $\updownarrow>1$ alors

$$x_n^n\ln x_n\ge \updownarrow^n\ln\updownarrow\to+\infty$$

ce qui est absurde car $x_n^n\ln x_n=1$. Il reste $\updownarrow=1$.

Exercice 3
(344)
(a) Introduisons la fonction $f_n:x\mapsto x^n+\ldots+x$ qui est continue, strictement croissante et vérifie

$$f_n(0)=0\text{ et }\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$$

La fonction f_n réalise une bijection de $[0;+\infty[$ vers $[0;+\infty[$, par suite l'équation E_n possède une unique solution $x_n\in\mathbb{R}_+$. Puisque

$$f_n(1/2)=\frac{1}{2}\frac{1-1/2^n}{1-1/2}<1\text{ et }f_n(1)=n\ge 1$$

on a

$$x_n\in[1/2;1].$$

(b) On a

$$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}+\ldots+x_n^2+x_n=x_n(x_n^n+\ldots+x_n)+x_n=2x_n\ge 1$$

donc $x_{n+1}\le x_n$ La suite (x_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. (c) Posons $\updownarrow=\lim x_n$. Puisque $x_2<1$,

$x_n\le x_2$ donne à la limite $\updownarrow<1$.

$$1=x_n^n+\ldots+x_n=x_n\frac{1-x_n^n}{1-x_n}$$

donne à la limite $1 = \dfrac{\updownarrow}{1-\updownarrow}$ car $0 \leq x_n^n \leq x_2^n \to 0$ et finalement $\updownarrow = 1/2$

Exercice 4
(349)
(a) Posons $v_n = u_n + 1$.
(v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = 1$ donc $u_n = 2^n - 1 \to +\infty$. (b) Posons $v_n = u_n - 1$.
(v_n) est géométrique de raison $1/2$ et $v_0 = -1$ donc $u_n = 1 - \dfrac{1}{2^n} \to 1$.

Exercice 5
(350)
On a
$z_{n+1} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n$ donc

$$z_n = \left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}\right)^n z_0$$

Or $\left|\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}\right| < 1$ donc $z_n \to 0$ puis $x_n, y_n \to 0$.

Exercice 6
(351)
Introduisons $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a
$x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = -\dfrac{y_n}{3}$
$x_n \to x_0$ et $y_n \to 0$ donc $z_n \to \mathrm{Re}(z_0)$.

Exercice 7
(352)
(a) $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$ et $u_0 - v_0 = -1$ donc $(u_n - v_n)$ est constante égale à -1. (b) $v_n = u_n + 1$ donc $u_{n+1} = 5u_n + 2$. La suite (u_n) est arithmético-géométrique. (c) $u_{n+1} - a = 5(u_n - a) + 4a + 2$. Pour $a = -1/2$,
$(u_n - a)$ est géométrique de raison 5 et de premier terme $3/2$. Ainsi

$$u_n = \frac{3.5^n - 1}{2} \text{ et } v_n = -\frac{3.5^n + 1}{2}$$

Exercice 8
(356)
Ce sont des suites récurrentes linéaire d'ordre 2 dont le terme général s'obtient à partir de la résolution de l'équation caractéristique associée.
(a) $u_n = 2^n(1-n)$. (b) . $u_n = -3 + 2^{2-n}$ (c)

$$u_n = 2\cos\frac{(n-1)\pi}{3}.$$

Exercice 9

(399)
(a)
$$u_n = \exp\left(\ln n/n\right) \to 1.$$
(b)
$$u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(x+\mathrm{o}\left(1\right)\right) \to \mathrm{e}^x.$$
(c)
$$u_n = \exp\left(\left(n+2\right)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\right) = \exp\left(-2+\mathrm{o}\left(1\right)\right) \to \mathrm{e}^{-2}.$$
(d)
$$u_n = -2n^2\sin\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)/2\right)\sin\left(\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)/2\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) \to 0.$$
(e)
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{n}\right) = 1+\frac{2\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$u_n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2\alpha}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(2\alpha+\mathrm{o}\left(1\right)\right) \to \mathrm{e}^{2\alpha}.$$
(f)
$$u_n = \left(1+\frac{1}{n\ln n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)^{n\ln n} \to \mathrm{e}.$$
(g)
$$\sqrt[n]{2} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln 2\right) = 1+\frac{1}{n}\ln 2+\mathrm{o}\left(1\right),$$
$$u_n = \left(1+\frac{\ln 24}{3n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \to \sqrt[3]{24}.$$
(h) Par le théorème des accroissements finis
$$\ln\left(\arctan\left(n+1\right)\right)-\ln\left(\arctan n\right) = \frac{1}{1+c^2}\frac{1}{\arctan c}$$
avec $n \leq c \leq n+1$ donc
$$u_n = \exp\left(n^2\frac{1}{1+c^2}\frac{1}{\arctan c}\right) \to \mathrm{e}^{2/\pi}$$

Exercice 10
(401)
(a)
$$u_n = \frac{1-\left(-2/3\right)^n}{1+\left(-2/3\right)^n} \to 1$$
(b)
$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}} \to 1$$
(c)
$$u_n = \frac{1-\sqrt{1+1/n^2}}{1+\sqrt{1-1/n^2}} \to 0$$

(d)

$$u_n = \frac{(n+1)}{2n} \to \frac{1}{2}$$

Exercice 11

(402)

(a)

$$u_n = \mathrm{e}^{n\,(\ln\,(1+1/n))}$$

or

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$$

car

$$\frac{\ln\,(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\langle 10230 \rangle} 1.$$

Par suite $u_n \to \mathrm{e}$. (b)

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{2}{n}\ln n} \to 1$$

car $\dfrac{\ln n}{n} \to 0$. (c)

$$\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\,(\sin\frac{1}{n})}$$

or

$$\frac{1}{n}\ln\left(\sin\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \to 0$$

donc

$$\left(\sin\frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1.$$

(d)

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\,\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}$$

or

$$n\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \sim -2 \to -2$$

donc

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \to \mathrm{e}^{-2}.$$

Exercice 12

(404)

(a) $S_n \geq \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty$ (b)

$$S_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty.$$

(c)

$$0 \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \to 0$$

donc $u_n \to 0$. (d)

$$0 \leq S_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \to 0.$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+n} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$

donc $\dfrac{n}{n+1} \leq S_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$ puis $u_n \to 1$. (f)

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

par le théorème des gendarmes : $S_n \to 1$. (g)

$$S_n = n! - (n-1)! + (n-2)! + \ldots + (-1)^n.$$

Par regroupement de termes. Si n est pair alors $S_n \geq n! - (n-1)!$ et si n est impair $S_n \geq n! - (n-1)! - 1$. Puisque

$$n! - (n-1)! = (n-1).(n-1)! \to +\infty,$$

on a $S_n \to +\infty$.

Exercice 13
(417)
(a)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \ldots + u_n)}{n(n+1)} \geq 0$$

donc (v_n) est croissante. (b)

$$v_{2n} = \frac{u_1 + \ldots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \ldots + u_{2n}}{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}$$

(c) On a $v_n \leq \updownarrow$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et (v_n) croissante donc (v_n) converge vers un réel $\updownarrow' \leq \updownarrow$. La relation précédente, passée à la limite, donne

$$2\updownarrow' \geq \updownarrow + \updownarrow'$$

ce qui permet de conclure $v_n \to \updownarrow$.