Corrigé
TD suites 2

Exercice 1
(3756)

Pour chaque k dans $1, \dots, n$, on a $n+k \leq n+n = 2n$ et donc

$$\frac{n}{n+k} \geq \frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n+k} \geq \frac{n}{2},$$

et donc la suite tend vers $+\infty$.

Remarquons que pour $0 \leq k \leq 2n+1$, on a $n^2 \leq n^2+k \leq n^2+2n+1$. Passant à l'inverse, multipliant par n, et sommant on trouve successivement les inégalités :

$$\frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2},$$

$$\frac{n}{n^2+2n+1} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{1}{n},$$

$$\frac{2n^2+2n}{n^2+2n+1} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{2n+2}{n}.$$

Par le théorème d'encadrement des limites, on déduit facilement que (u_n) converge vers 2.

Exercice 2
(3758)

On va démontrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln(n!) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right).$$

Pour cela, on distingue les cas n pairs et n impairs. Si $n = 2p$, on écrit

$$\ln(n!) = \ln(1) + \dots + \ln(2p) \geq \ln(p+1) + \dots + \ln(2p) \geq p\ln(p+1) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right).$$

Si $n = 2p+1$, on écrit

$$\ln(n!) = \ln(1) + \dots + \ln(2p+1) \geq \ln(p+1) + \dots + \ln(2p+1) \geq (p+1)\ln(p+1) \geq \frac{n}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right).$$

On en déduit que

$$\frac{\ln(n!)}{n} \geq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$$

et donc la suite $(\ln(n!)/n)$ tend vers $+\infty$.

On sait que $nx - 1 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx$ et donc

$$\frac{x}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha}} \leq u_n \leq \frac{x}{n^{\alpha-1}}.$$

On distingue alors plusieurs cas. D'abord, si $x=0$, la suite (u_n) est identiquement nulle, et donc elle est convergente. Ensuite, si $x\neq 0$, et si $\alpha>1$, alors $\frac{x}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^\alpha}$ et $\frac{x}{n^{\alpha-1}}$ tendent vers 0. Par le théorème d'encadrement, il en est de même de (u_n). Si $\alpha=1$, alors par le même théorème, (u_n) tend vers x. Enfin, si $\alpha<1$ et $x>0$, alors $\frac{x}{n^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers $+\infty$, et il en est de même de (u_n) ; si $\alpha<1$ et $x<0$, on utilise que $\frac{x}{n^{\alpha-1}}$ tend vers $-\infty$ pour conclure que (u_n) tend vers $-\infty$.

L'idée ici est que la suite $n!$ tend extrêmement vite vers $+\infty$, et que les termes $k!/n!$ avec $k<n$ sont tous très petits. On peut formaliser ceci en remarquant d'une part que $u_n\geq 1$, et que d'autre part

$$\begin{aligned}
u_n &\leq 1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k!}{n!}\\
&\leq 1+\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{n-2}\frac{k!}{n!}\\
&\leq 1+\frac{1}{n}+(n-2)\times\frac{1}{n(n-1)}\\
&\leq 1+\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement des limites, la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 3
(3759)

Faux ! Penser à $u_n=n$ et $v_n=-n$.
Faux ! Par exemple, $u_n=(-1)^n$ et $v_n=(-1)^n$.
Vrai. Raisonnons par l'absurde et supposons que (u_n+v_n) converge. Alors, on peut écrire

$$v_n=(u_n+v_n)-u_n$$

et donc (v_n) converge comme somme de deux suites convergentes, ce qui est faux !
Faux. Par exemple, $u_n=0$ et $v_n=n$.

Exercice 4
(3762)

Le plus simple est de partir de l'inégalité suivante :

$$0\leq a-u_n\leq a-u_n+b-v_n=(a+b)-(u_n+v_n).$$

Du théorème d'encadrement, on tire que $(a-u_n)$ converge vers 0, ou encore que (u_n) converge vers a.

Exercice 5
(3763)

On va montrer que (u_n) et (v_n) convergent toutes les deux vers 1. Procédons par l'absurde. Quitte à échanger les rôles joués par (u_n) et (v_n), on peut supposer que (u_n) ne converge pas vers 1. On sait donc qu'il existe >0 tel que, pour tout $N>0$, il existe $n:=n(N)\geq N$ avec $|u_n-1|>$, soit, puisque $0\leq u_n\leq 1$,

$$u_n<1-.$$

D'autre part, puisque $(u_n v_n)$ converge vers 1, on sait qu'il existe $N_1 > 0$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on a

$$1- \leq u_n v_n.$$

Mais alors, pour un $n \geq N_1$ tel que $u_n < 1-$, on a

$$1- \leq u_n v_n \leq u_n < 1 - .$$

Ceci est absurde, ce qui achève la preuve du fait que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.
On aurait aussi pu (plus simplement) raisonner à partir du théorème d'encadrement, en remarquant que

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1.$$

Exercice 6
(3764)

Par définition, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon.$$

On a alors, pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \cdots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0} \\ &\leq (l+\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a $0 \leq u_n \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}$. Or, $(l+\varepsilon)^{n-n_0}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème d'encadrement, (u_n) tend vers 0.

Puisque $l > 1$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $l - \varepsilon > 1$. Il existe alors un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l - \varepsilon.$$

Par un raisonnement en tout point similaire à celui de la question précédente, on obtient

$$u_n \geq (l-\varepsilon)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Puisque $(l-\varepsilon) > 1$, la suite $(l-\varepsilon)^{n-n_0}$ tend vers $+\infty$. Il en est de même de (u_n).

Pour $u_n = n$, u_{n+1}/u_n tend vers 1 et (u_n) tend vers $+\infty$. Pour $u_n = 1$, $u_{n+1}/u_n = 1$ et (u_n) tend vers 1. Pour $u_n = 1/n$, u_{n+1}/u_n tend vers 1 et (u_n) tend vers 0. On ne peut donc rien conclure dans ce cas.

Exercice 7
(3766)

Pour les deux questions, la clé est donnée par la formule suivante, qu'on prouve par récurrence sur n : pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_n}{v_0}.$$

La formule est en effet vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, en utilisant l'hypothèse, on déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_0} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \times \frac{u_n}{u_0} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \times \frac{v_n}{v_0} = \frac{v_{n+1}}{v_0}.$$

Si (v_n) converge vers o, alors on a

$$0 \leq u_n \leq v_n \frac{u_0}{v_0}$$

et donc par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers o.

Si (u_n) tend vers $+\infty$, alors on a

$$\frac{v_0}{u_0} u_n \leq v_n$$

et donc (v_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 8
(3767)

Posons $M = \max(|u_1|, \dots, |u_{n_0}|)$. On coupe alors la somme à l'indice n_0 :

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \frac{|u_1| + \cdots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \cdots + |u_n|}{n} \\ &\leq \frac{M + \cdots + M}{n} + \frac{+ \cdots +}{n} \\ &\leq \frac{M(n_0 - 1)}{n} + . \end{aligned}$$

Soit n_1 un entier tel que $\frac{M(n_0-1)}{n_1} \leq$. Alors, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a

$$|S_n| \leq \frac{M(n_0-1)}{n} + \leq \frac{M(n_0-1)}{n_1} + \leq 2.$$

Ceci prouve que (S_n) converge vers o.

On a $S_{2n} = 0$ et $S_{2n+1} = \frac{-1}{2n+1}$. Ainsi, (S_n) converge vers o, alors que (u_n) n'est pas convergente. La réciproque du résultat démontré à la première question est donc fausse.

Posons $v_n = u_n - l$ et

$$T_n = \frac{v_1 + \cdots + v_n}{n} = \frac{(u_1 - l) + \cdots + (u_n - l)}{n} = S_n - l.$$

On sait que (v_n) converge vers o, donc, d'après le résultat de la première question, (T_n) converge vers o. Ainsi, (S_n) converge vers l.

Soit $A > 0$. Il existe n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a $u_n \geq A$. Posons aussi $M = \max(|u_1|, \dots, |u_{n_0}|)$. Alors, pour $n \geq n_0$, on a

$$\begin{aligned} S_n &\geq \frac{u_{n_0+1} + \cdots + u_n}{n} - \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_0}|}{n} \\ &\geq \frac{A(n - n_0)}{n} - \frac{M n_0}{n}. \end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{A(n-n_0)}{n} - \frac{Mn_0}{n}$ converge vers A. Ainsi, il existe un entier n_1 tel que, pour $n \geq n_1$, on a

$$\frac{A(n-n_0)}{n} - \frac{Mn_0}{n} \geq \frac{A}{2}.$$

Finalement, pour $n \geq \max(n_0, n_1)$, on trouve

$$S_n \geq \frac{A}{2}.$$

Ceci prouve que (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 9
(3771)

Puisqu'une suite convergente est majorée, il suffit de prouver que, dans les conditions de la question 2., la suite (u_n) est convergente. On traite donc directement 2.

On va prouver que (u_n) est convergente en prouvant qu'elle est majorée. Soit $(u_{\phi(n)})$ une suite extraite de (u_n) qui est majorée, disons par $M \in \mathbb{R}$. On sait que, pour une suite extraite, on a toujours $\phi(n) \geq n$. On a donc $u_n \leq u_{\phi(n)} \leq M$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée donc elle converge.

On va construire par récurrence sur n des entiers $\phi(n)$ tels que

$$\phi(n+1) > \phi(n) \text{ et } u_{\phi(n)} \geq n.$$

Pour $n = 0$, il suffit de choisir $\phi(0)$ tel que $u_{\phi(0)} \geq 0$. Supposons $\phi(n)$ construit, et posons $A = \max(n, u_0, \dots, u_{\phi(n)}) + 1$. Puisque (u_k) est non-majorée, on peut trouver un entier p tel que $u_p \geq A$. Mais alors, par choix de A, il est clair que p ne peut être égal à $0, 1, \dots, \phi(n)$. On a donc $p > \phi(n)$ et $u_p \geq n+1$. Le choix $\phi(n+1) = p$ répond alors aux exigences formulées. Mais alors la suite $(u_{\phi(n)})$ est bien une suite extraite de (u_n), car l'application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. De plus, par construction, elle tend vers $+\infty$.

Exercice 10
(3774)

Utilisant que $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$, on obtient

$$|u_n| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Par le théorème d'encadrement des limites, (u_n) converge vers 0.

On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :

$$u_n = \frac{2n\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)}{5n\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n}\right)} = \frac{2}{5} \times \frac{1 + \frac{(-1)^n}{2n}}{1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n}}.$$

Or, $1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{5n}$ et $1 + \dfrac{(-1)^n}{2n}$ tendent vers 1. On en déduit que (u_n) converge vers $2/5$.

On factorise au numérateur et au dénominateur par le terme dominant :

$$u_n = \frac{n^3(1 + 5/n^2)}{4n^2\left(1 + \frac{\sin(n)}{4n^2} + \frac{\ln(n)}{4n^2}\right)} = \frac{n}{4} \times \frac{1 + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{\sin(n)}{4n^2} + \frac{\ln n}{4n^2}}.$$

Or, $1 + \dfrac{5}{n^2}$ et $1 + \dfrac{\sin(n)}{4n^2} + \dfrac{\ln n}{4n^2}$ tendent tous les deux vers 1 (pour le deuxième terme, procéder comme à la première question pour $\dfrac{\sin(n)}{4n^2}$ et utiliser la croissance comparée du logarithme et des polynômes). Ainsi, (u_n) tend vers $+\infty$.

Multipliant au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, on trouve :

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$

Ainsi, (u_n) tend vers 0.

Il suffit d'écrire $3^n e^{-3n} = \left(\frac{3}{e^3}\right)^n$ et puisque $0 < \frac{3}{e^3} < 1$, on en déduit que la suite $(3^n e^{-3n})$ tend vers 0.

Exercice 11
(3775)

On met en facteur le terme dominant dans chaque logarithme, de sorte que

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(2n^2\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right) - \ln\left(3n\left(1+\frac{1}{3n}\right)\right) \\ &= 2\ln n + \ln 2 + \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \ln(n) - \ln(3) - \ln\left(1+\frac{1}{3n}\right) \\ &= \ln n + \ln 2 - \ln 3 + v_n \end{aligned}$$

où la suite (v_n) tend vers 0. On en déduit que u_n tend vers $+\infty$.

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée, de sorte que

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}.$$

On met encore en facteur, dans chaque racine carrée du dénominateur, le terme dominant (en n^2), et on trouve

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$

Or, $\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ tend vers 1 et $\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$ tend également vers 1. On en déduit que (u_n) converge vers 1.

Si $a = b$, alors $u_n = 0$ pour tout n, et donc (u_n) converge vers 0. Si $a > b$, alors a^n est prépondérant sur b^n au sens que

$$\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \to 0$$

puisque $|b/a| < 1$. On factorise donc par a^n au numérateur et au dénominateur :

$$u_n = \frac{a^n\left(1-\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)}{a^n\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

On en déduit que dans ce cas, (u_n) converge vers 1. Si $b > a$, on factorise cette fois par b^n et c'est $(a/b)^n$ qui converge vers 0. On trouve :

$$u_n = \frac{-1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^n}.$$

(u_n) converge donc vers -1 dans ce cas.

On factorise par e^n dans le logarithme. On obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln\left(e^n(1+ne^{-n})\right)}{n} \\ &= \frac{n+\ln(1+ne^{-n})}{n}. \end{aligned}$$

D'autre part, ne^{-n} tend vers 0 (par exemple, on peut écrire $ne^{-n} = \frac{1}{\frac{e^n}{n}}$ et utiliser la comparaison des fonctions exponentielle et polynôme au voisinage de l'infini). Puisque la fonction $\ln$ est continue en 1 et $\ln(1) = 0$, on en déduit que $\ln(1 + ne^{-n})$ tend vers 0. Il vient $\ln(1 + ne^{-n})/n$ tend vers 0, et donc la suite (u_n) converge vers 1.

On factorise par le terme dominant dans chaque logarithme. On en déduit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\ln(\sqrt{n}) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln(n^2) + \ln(1 + n^{-2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\ln n + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2\ln(n) + \ln(1 + n^{-2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\ln n}}{2 + \frac{\ln(1+n^{-2})}{\ln n}}. \end{aligned}$$

Puisque $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $\ln(1 + n^{-2})$ tendent vers 0, (u_n) converge vers $\frac{1}{4}$.

Exercice 12
(3782)

On a $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

On va prouver par récurrence sur n que $\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{2n}$. C'est clair pour $n = 1$. Si c'est vrai au rang $n - 1$, alors :

$$\sqrt{n + \sqrt{n-1}} \leq u_n \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n}}.$$

Mais, clairement on a $\sqrt{n} \leq \sqrt{n + \sqrt{n-1}}$ d'une part et

$$\left(\sqrt{n + 2\sqrt{n}}\right)^2 = n + 2\sqrt{n} \leq 2n$$

d'autre part, ce qui prouve la relation demandée.

On repart de l'inégalité trouvée dans la preuve de la question précédente, à savoir

$$\sqrt{n} \leq u_n \leq \sqrt{n + 2\sqrt{n-1}}$$

qui se traduit en

$$1 \leq \frac{u_n}{\sqrt{n}} \leq \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{n-1}}{n}}.$$

Par passage à la limite, on en déduit que $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ converge vers 1.

Exercice 13
(3789)

Il est clair que (u_n) est croissante puisque $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ et que $v_n - u_n \to 0$. La seule difficulté est de prouver que (v_n) est décroissante. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

Là encore, il suffit d'appliquer la définition, même si c'est plus difficile techniquement. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\ u_{n+1} &= \frac{1}{1+(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)+(n+1)} + \frac{1}{n+(n+1)} + \frac{1}{(n+1)+(n+1)} \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geq 0. \end{aligned}$$

De même,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leq 0$$

et enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n}$$

qui tend bien vers 0.

Exercice 14
(3794)

Puisque $x \mapsto 2/x$ est décroissante, la fonction f est décroissante sur $[1,3]$. De plus, $f(1) = 3$ et $f(3) = 5/3 > 1$. L'intervalle $[1,3]$ est bien stable par f, ce qui entraîne en particulier que la suite (u_n) est bien définie et que $u_n \in [1,3]$ pour tout entier n.

Puisque $v_{n+1} = u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$, on pose $g = f \circ f$ qui laisse bien sûr stable l'intervalle $[1,3]$. Puisque la composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante, g est croissante sur $[1/3]$. De plus, on a

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5/3 > u_0$$

et donc $v_1 \geq v_0$. On prouve alors par récurrence sur n que la suite (v_n) est croissante, ie que pour tout n on a $v_{n+1} \geq v_n$. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai au rang n, il suffit d'utiliser la croissance de g sur $[1,3]$ pour démontrer que

$$1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3 \implies v_{n+1} = f(v_n) \leq f(v_{n+1}) = v_{n+2}.$$

Remarquons ensuite que $w_n = f(v_n)$. Ainsi, de la décroissance de f sur $[1,3]$ et de l'inégalité $v_n \leq v_{n+1}$, on déduit l'inégalité

$$w_n = f(v_n) \geq f(v_{n+1}) = w_{n+1}.$$

Autrement dit, (w_n) est décroissante.

Puisque (v_n) est croissante et majorée et que (w_n) est décroissante et minorée, on en déduit que ces deux suites sont convergentes. Leur limite respective est un élément de $[1,3]$ vérifiant l'équation $g(x)=x$. Or,

$$g(x)=1+\frac{2}{1+\frac{2}{x}}=\frac{3x+2}{x+2}.$$

L'équation $g(x)=x$ est donc équivalente à

$$x^2-x-2=0 \iff x=2 \text{ ou } x=-1.$$

La seule solution dans $[1,3]$ est 2, donc les deux suites convergent vers la même limite, à savoir 2.

Puisque (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers 2, on en déduit que (u_n) est elle aussi convergente vers 2.

Exercice 15
(3795)

On pose $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Il est facile de voir que f est décroissante sur $]0,1[$, puis croissante sur $[1,+\infty[$, avec $f([1,+\infty[)=[2,+\infty[$. D'autre part, $f(]0,1[)=([2,+\infty[)$. Autrement dit, quelle que soit la valeur de départ $u_0>0$, on a toujours $u_1\geq 2$, et comme cet intervalle est stable par f, $u_n\geq 2$ pour tout $n\geq 1$. Maintenant, $f(x)\geq x$ pour $x\geq 1$, ce qui prouve que $u_{n+1}\geq u_n$ pour $n\geq 1$, donc que la suite (u_n) est croissante. Elle ne peut pas être majorée car sinon elle serait convergente, et sa limite devrait vérifier $\ell=\ell+\dfrac{1}{\ell}$, équation qui n'a pas de solutions dans $[0,+\infty[$. On en déduit que (u_n) diverge vers $+\infty$.

On pose, pour $x\geq 0$, $f(x)=\sqrt{1+x}$. f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, qui vérifie $f([0,+\infty[)=[1,+\infty[$. De plus, l'équation

$$f(x)=x \implies x+1=x^2$$

admet une unique racine dans $[1,+\infty[$ qui est $\alpha:=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. L'étude du signe de $f(x)-x$ montre que $f(x)\geq x$ si $x\in[0,\alpha]$ et $f(x)\leq x$ si $x\geq\alpha$. Ainsi, l'intervalle $[0,\alpha]$ est stable par f. Puisque $u_0\in[0,\alpha]$, ceci implique que (u_n) est bien définie et que $u_n\in[0,\alpha]$ pour tout n. De plus, puisque $f(x)\geq x$ dans l'intervalle $[0,\alpha]$, $u_{n+1}=f(u_n)\geq u_n$ et donc la suite (u_n) est croissante. Elle est majorée, donc convergente. Sa limite doit vérifier l'équation $f(x)=x$ et appartenir à $[0,\alpha]$. (u_n) converge donc vers $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Dans le cas $u_0=2$, on peut refaire la même étude en remplaçant l'intervalle $[0,\alpha]$ par l'intervalle $[\alpha,+\infty[$. Puisque $f(x)\leq x$ sur cet intervalle, on obtient que (u_n) est cette fois décroissante. Elle va donc converger (car elle est aussi minorée), toujours vers α.