TD limite et continuite

Exercice 1
(30)
Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $f([a,b]) \subset [a,b]$ alors f admet un point fixe.
2. Montrer que si $[a,b] \subset f([a,b])$ alors f admet un point fixe.

Exercice 2
(31)
Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 3
(32)
Montrer que les seules applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{Z}$ sont les fonctions constantes.

Exercice 4
(36)
Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha \in [0, 1-1/n]$ tel que

$$f(\alpha + 1/n) = f(\alpha)$$

Exercice 5
(37)
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante.
Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 6
(38)
Soit $f\colon 0{+}\infty \to \mathbb{R}$ continue, positive et telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in 0{+}\infty$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 7
(45)
Soit f une fonction croissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

1. Montrer que s'il existe $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^k(x) = x$ alors x est un point fixe pour f.
2. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 8
(46)
Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9

(47)

Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^x$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \ln x . \ln(\ln x)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\arccos x}$

Exercice 10

(48)

Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x . \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x\cos \mathrm{e}^x}{x^2+1}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x-\sin x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\arctan x}{x}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\lfloor 1/x \rfloor$
6. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\lfloor 1/x \rfloor$

Exercice 11

(50)

Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ de l'application

$$f\colon x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$$

Exercice 12

(57)

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. Calculer $f(0)$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
3. Établir que pour tout $r \in$, $f(r) = ar$ avec $a = f(1)$.
4. Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Exercice 13

(58)

On cherche les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

1. On suppose f solution et $f(0) = f(1) = 0$.
   Montrer que f est périodique et que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(2x)$$
   En déduire que f est nulle.

2. Déterminer toutes les fonctions f solutions.

Exercice 14
(59)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right)$$

1. On suppose $f(0) = 0$. Vérifier

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(x+y\right) = f(x) + f(y)$$

2. On revient au cas général, déterminer f.

Exercice 15
(61)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$$

Montrer que f est constante.

Exercice 16
(62)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$$

Montrer que f est une fonction constante.