# Corrigé
# TD limite et continuite

## Exercice 1
**(30)**
Dans les deux études, on introduit $\varphi : x \mapsto f(x) - x$ définie et continue sur

$$[a; b].$$

L'objectif est de montrer que $\varphi$ s'annule
(a) Si

$$f([a; b]) \subset [a; b]$$

alors

$$f(a) \in [a; b]$$

et donc

$$\varphi(a) = f(a) - a \geq 0.$$

De même $\varphi(b) \leq 0$ et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'alors $\varphi$ s'annule. (b) Si

$$[a; b] \subset f([a; b])$$

alors il existe

$$\alpha \in [a; b]$$

tel que $f(\alpha) = a$. On a alors $\varphi(\alpha) = a - \alpha \leq 0$. De même en introduisant $\beta$ tel que $f(\beta) = b$, on a $\varphi(\beta) \geq 0$ et l'on peut à nouveau affirmer que la fonction continue $\varphi$ s'annule.

## Exercice 2
**(31)**
Soit

$$\varphi : [0; 1] \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Un point fixe de $f$ est une valeur d'annulation de $\varphi$. $\varphi$ est continue, $\varphi(0) = f(0) \geq 0$ et

$$\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi$ s'annule.

## Exercice 3
**(32)**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue. Par l'absurde : Si $f$ n'est pas constante alors il existe $a < b$ tel que $f(a) \neq f(b)$. Soit $y$ un nombre non entier compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$ et donc $f$ n'est pas à valeurs entière. Absurde.

## Exercice 4
**(36)**
Posons

$$\varphi : [0; 1 - 1/n] \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi(x) = f(x+1/n) - f(x)$$

La fonction $\varphi$ est continue. Si $\varphi$ est de signe strictement constant alors

$$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} f((k+1)/n) - f(k/n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(k/n)$$

ne peut être nul. Puisque $\varphi$ prend une valeur positive et une valeur négative, par le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi$ s'annule.

## Exercice 5

## (37)

Unicité : Soit $g : x \mapsto f(x) - x$.

$g$ est strictement décroissante donc injective et ne peut donc s'annuler qu'au plus une fois. Existence : Par l'absurde, puisque $g$ est continue, si elle ne s'annule pas elle est strictement positive ou négative. Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ alors

$$f(x) > x \underset{x\to+\infty}{\langle 10230\rangle} + \infty$$

ce qui est absurde puisque

$$\lim_{+\infty} f = \inf_{\mathbb{R}} f.$$

Si $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$ alors

$$f(x) < x \underset{x\to-\infty}{\langle 10230\rangle} - \infty$$

ce qui est absurde puisque

$$\lim_{-\infty} f = \sup_{\mathbb{R}} f.$$

## Exercice 6

## (38)

Si $f(0) = 0$ alors $\alpha = 0$ convient. Sinon, considérons

$g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ La fonction $g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ . Puisque $f(0) > 0$, par opérations sur les limites

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty.$$

De plus

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \updownarrow.$$

Puisque $g$ est continue et qu'elle prend des valeurs inférieures et supérieures à 1, on peut affirmer par le théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 1$ d'où $f(\alpha) = \alpha$.

## Exercice 7

## (45)

(a) Si $f(x) > x$ alors par croissance de $f$,

$$f^k(x) \geq f^{k-1}(x) \geq \ldots \geq f(x) > x$$

ce qui est absurde. Une étude analogue contredit $f(x) < x$. (b) On a $f(0) \geq 0$ et $f(1) \leq 1$. Par dichotomie, on peut construire deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ vérifiant

$$f(a_n) \geq a_n \text{ et } f(b_n) \leq b_n$$

On initie les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Une fois les termes $a_n$ et $b_n$ déterminés, on introduit $m = (a_n + b_n)/2$. Si $f(m) \geq m$ on pose $a_{n+1} = m$ et $b_{n+1} = b_n$. Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = m$. Les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ ainsi déterminées sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune $c$. Puisque $a_n \leq c \leq b_n$, on a par croissance

$$f(a_n) \leq f(c) \leq f(b_n)$$

et donc $a_n \leq f(c) \leq b_n$ Or $(a_n)$ et $(b_n)$ convergent vers $c$ donc par encadrement $f(c) = c$ On peut aussi décrire un point fixe de $f$ en considérant

$$c = \sup\{x \in [0;1], f(x) \geq x\}$$

Les deux questions de cet oral ne semblent pas être liées.

## Exercice 8
## (46)

$$\{x \in [0;1] \langle 8739 \rangle f(x) \geq x\}$$

est non vide (0 y appartient) et est majoré (par 1). On peut donc poser

$$\alpha = \sup\{x \in [0;1] \langle 8739 \rangle f(x) \geq x\}.$$

Pour tout $x > \alpha$, on a $f(x) < x$ donc

$$f(\alpha) \leq f(x) < x.$$

Puisque $f(\alpha) \leq x$ pour tout $x > \alpha$, on a aussi $f(\alpha) \leq \alpha$. Pour tout $x < \alpha$, il existe

$$t \in ]x; \alpha]$$

tel que $f(t) \geq t$ donc

$$f(\alpha) \geq f(t) \geq t \geq x.$$

Puisque ceci vaut pour tout $x < \alpha$, on a aussi $f(\alpha) \geq \alpha$. Finalement $f(\alpha) = \alpha$. On peut aussi procéder par dichotomie.

## Exercice 9
## (47)

(a) Quand $x \to 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{1 + x - (1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \to 1$$

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x} = \frac{1 - 1/\sqrt{x}}{\frac{\ln x}{x} + 1} \to 1$$

(c) Quand $x \to 0^+$,

$$x^x = \mathrm{e}^{x \ln x} = \mathrm{e}^X$$

avec $X = x\ln x \to 0$ donc $x^x \to 1$. (d) Quand $x \to 1^+$,

$$\ln x.\ln(\ln x) = X\ln X$$

avec $X = \ln x \to 0$ donc

$$\ln x.\ln(\ln x) \to 0$$

(e) Quand $x \to 0$,

$$(1+x)^{1/x} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \mathrm{e}^X$$

avec $X = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ donc

$$(1+x)^{1/x} \to \mathrm{e}.$$

(f) Quand $x \to 1$,

$$\frac{1-x}{\arccos x} = \frac{1-\cos y}{y} = \frac{2\sin^2(y/2)}{y} = \sin(y/2)\frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

avec $y = \arccos x \to 0$ donc $\sin y/2 \to 0$ et $\dfrac{\sin y/2}{y/2} \to 1$ puis $\dfrac{1-x}{\arccos x} \to 0$.

## Exercice 10
## (48)

(a) Quand $x \to 0$,

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leq |x| \to 0$$

(b) Quand $x \to +\infty$,

$$\left|\frac{x\cos \mathrm{e}^x}{x^2+1}\right| \leq \frac{x}{x^2+1} \to 0$$

(c) Quand $x \to +\infty$,

$$\mathrm{e}^{x-\sin x} \geq \mathrm{e}^{x-1} \to +\infty$$

(d) Quand $x \to +\infty$,

$$\left|\frac{x+\arctan x}{x} - 1\right| \leq \frac{\arctan x}{x} \leq \frac{\pi}{2x} \to 0$$

(e) Quand $x \to 0$, $1/x - 1 \leq \lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$ donc $|\lfloor 1/x \rfloor - 1/x| \leq 1$ puis

$$|x\lfloor 1/x \rfloor - 1| \leq |x| \to 0$$

(f) Quand $x \to +\infty$,
$1/x \to 0$ donc $\lfloor 1/x \rfloor = 0$ puis $x\lfloor 1/x \rfloor = 0 \to 0$.

## Exercice 11
## (50)

Par opération $f$ est continue sur chaque

$$I_k = ]k; k+1[$$

avec $k \in \mathbb{Z}$. Il reste à étudier la continuité en $a \in \mathbb{Z}$. Quand $x \to a^+$ :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \to a = f(a)$$

car $E(x) \to a$. Quand $x \to a^-$ :

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} \to a - 1 + 1 = a = f(a)$$

car $\lfloor x \rfloor \to a - 1$. Par continuité à droite et à gauche, $f$ est continue en $a$. Finalement $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

## Exercice 12

**(57)**

(a) Pour $x = y = 0$, la relation donne $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. Pour $y = -x$, la relation donne

$$f(0) = f(x) + f(-x)$$

donc $f(-x) = -f(x)$. (b) Par récurrence, on montre pour $n \in \mathbb{N}$ : $f(nx) = nf(x)$. Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on écrit $n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a alors

$$f(nx) = -f(px) = -pf(x) = nf(x).$$

(c) Soit $r \in \mathbb{Q}$. On peut écrire $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

$$f(r) = pf(1/q) = \frac{p}{q} qf(1/q) = \frac{p}{q} f(1) = ar.$$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(u_n)$ telle que $u_n \to x$ et $u_n \in \mathbb{Q}$. Par continuité

$$f(u_n) \to f(x)$$

or puisque $u_n \in \mathbb{Q}$

$f(u_n) = au_n \to ax$ donc par unicité de la limite $f(x) = ax$.

## Exercice 13

**(58)**

(a) $f(2-x) + f(x) = 0$ et $f(-x) + f(x) = 0$ donc $f(x) = f(x+2)$ donc $f$ est périodique. $f(x/2) = f(x)/2$ donc $f(2x) = 2f(x)$. Puisque $f$ est continue et périodique, $f$ est bornée. Or la relation $f(2x) = 2f(x)$ implique que $f$ n'est pas bornée dès qu'elle prend une valeur non nulle. Par suite $f$ est nulle. (b) Pour $a = f(1) - f(0)$ et $b = f(0)$, on observe que

$$g(x) = f(x) - (ax + b)$$

est solution du problème posé et s'annule en 0 et 1 donc $g$ est nulle et $f$ affine. La réciproque est immédiate.

## Exercice 14

**(59)**

(a) On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(0)) = \frac{1}{2} f(x)$$

donc

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2} f(x+y)$$

On en déduit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(b) Sachant $f$ continue, on peut alors classiquement conclure que dans le cas précédent $f$ est de la forme $x \mapsto ax$. Dans le cas général, il suffit de considérer $x \mapsto f(x) - f(0)$ et de vérifier que cette nouvelle fonction satisfait toujours la propriété initiale tout en s'annulant en 0. On peut donc conclure que dans le cas général $f$ est affine : $x \mapsto ax + b$

## Exercice 15

**(61)**
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $(u_n)$ définie par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$ Si $x \geq 1$ alors on montre par récurrence que $(u_n)$ est décroissante et supérieure à 1. Si $x \leq 1$ alors on montre par récurrence que $(u_n)$ est croissante et inférieure à 1. Dans les deux cas la suite $(u_n)$ converge vers 1. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$f(x) = f(u_n)$ donc à la limite $f(x) = f(1)$.

## Exercice 16

**(62)**
On a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

Par récurrence, on montre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

Quand $n \to +\infty$,

$x/2^n \to 0$ et donc par continuité de $f$ en 0

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\langle 10230\rangle} f(0)$$

Or

$$f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x) \underset{n\to+\infty}{\langle 10230\rangle} f(x)$$

donc par unicité de la limite $f(x) = f(0)$. Finalement $f$ est constante égale à $f(0)$.