Devoir maison n°10

pour lundi 5 janvier 2015

Exercice

Étudier les limites des suites de terme général :

Q1. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n}$ **Q2.** $u_n = \dfrac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}}$ **Q3.** $u_n = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}$

Q4. $u_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ **Q5.** $u_n = 1+\dfrac{1}{p}$ si $n=2p$ et $u_n = 1-\dfrac{1}{p^2}$ si $n=2p+1$

Problème

Soient a et b deux réels positifs ou nuls, on définit deux suites u et v ainsi :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \qquad \forall n\in\mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

Q6. Montrer que u_n et v_n sont bien définis pour tout $n\in\mathbb{N}$

Q7. Déterminer u et v dans le cas où $a=0$ et dans celui où $b=0$

Q8. Démontrer que pour tout $n\geqslant 1$, et $a\neq b$, on a

$$(i)\ \ 0\leqslant v_n\leqslant v_{n+1}<u_{n+1}<u_n$$
$$(ii)\ \ u_{n+1}-v_{n+1}\leqslant \frac{1}{2}(u_n-v_n)$$

Que deviennent ces égalités si $a=b$?

Q9. Démontrer que u et v sont convergentes et ont la même limite.

On notera $M(a,b)$ la limite commune des suites u et v.
On l'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de* a *et* b.
On définit la fonction $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ par $f(x)=M(1,x)$.

Q10. Montrer que pour tous réels $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $\lambda\geqslant 0$, et pour tout entier naturel n, on a
a) $M(u_n,v_n)=M(a,b)$
b) $M(a,b)=M(b,a)$
c) $M(\lambda a,\lambda b)=\lambda M(a,b)$

Q11. En déduire que pour tout $a>0$, on a $M(a,b)=af\left(\dfrac{b}{a}\right)$

Q12. Écrire une fonction python `moyenneAG` qui prend en argument un entier p et rend en résultat une valeur de $f(2)$ à 10^{-p} près.