DM 10. Corrigé

Exercice **Q1.** ~~$\sin(n^2)$ est borné~~ donc $\frac{\sin(n^2)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: $\boxed{u_n \to 0}$

Q2. $u_n = \dfrac{n^3\left(1+\frac{5}{n^2}\right)}{n^3\left(5+\frac{\cos n}{n^3}+\frac{1}{n^5}\right)}$ $\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{5}{n^2} \to 1, \quad \frac{\cos n}{n^3} \to 0 \\ \text{car } \cos n \text{ borné,} \\ \text{donc } 5+\frac{\cos n}{n^3}+\frac{1}{n^5} \to 5 \end{array}\right.$

donc $\boxed{u_n \to \frac{1}{5}}$

+ rapide : $n^3+5n \sim n^3$, $5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2} \sim 5n^3$

donc $u_n \sim \frac{n^3}{5n^3} = \frac{1}{5}$ donc $u_n \to \frac{1}{5}$

Q4. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ car $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{k}$

donc $u_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ qui diverge (série harmonique) et tend vers $+\infty$ quand $n\to+\infty$

donc $\boxed{u_n \to +\infty}$

Q3. $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n^2}}$: ON PASSE EN EXPONENTIELLE :

$u_n = e^{\frac{1}{n^2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$ or $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$

donc $\frac{1}{n^2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{-1}{n^4}$ donc $\frac{1}{n^2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \to 0$

d'où $\boxed{u_n \to 1}$

un peu + simple : $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \to 0$ donc $\frac{1}{n^2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \to 0$

d'où $u_n \to 1$

Q5. on a $u_{2p} = 1+\frac{1}{p}$ donc $u_{2p} \to 1$

$u_{2p+1} = 1-\frac{1}{p^2}$ donc $u_{2p+1} \to 1$

donc (prop. du cours) $\boxed{u_n \to 1}$

PB Q6) montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que u_n et v_n sont bien définis et positifs:

$n=0$: a et $b \in \mathbb{R}_+$ donc $u_0 = a$ et $v_0 = b$ aussi.

$n>0$: u_{n+1} est défini sans problème, et positif (car u_n et v_n le sont par hypothèse de récurrence)

v_{n+1} ———— car $u_n v_n \geq 0$ et positif.

On a donc montré que u_n et v_n sont définis pour tout $n \in \mathbb{N}$, et positifs.

Q7.) $a=0$: alors $u_1 = \frac{v_0}{2} = \frac{b}{2}$, $v_1 = 0$, $u_2 = \frac{u_1}{2} = \frac{b}{4}$, $v_2 = 0$, ..

d'où: pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{b}{2^n}$, $v_n = 0$?

Démontrons-le par récurrence sur $n \geq 1$:

$n=1$: $u_1 = \frac{b}{2}$, $v_1 = 0$ OK

$n>1$: supposons $u_n = \frac{b}{2^n}$, $v_n = 0$, alors $u_{n+1} = \frac{\frac{b}{2^n} + 0}{2} = \frac{b}{2^{n+1}}$

$v_{n+1} = \sqrt{\frac{b}{2^n} \times 0} = 0$.

Donc pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{b}{2^n}$ et $v_n = 0$

$b=0$: on a $u_0 = a$, $v_0 = 0$: on retombe dans le cas précédent à partir du rang $n=1$. D'où

$\forall n \geq 0$, $u_n = \frac{a}{2^n}$, $v_n = 0$

Q8) (i) montrons $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \leq \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ (*)

~~soient~~ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ avec $\alpha < \beta$:

- on a $\alpha \leq \sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow \alpha^2 \leq \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ ou $\alpha = 0$: donc $\alpha \leq \sqrt{\alpha\beta}$

- on a $\sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha\beta < \frac{1}{4}(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$\Leftrightarrow 0 < (\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha \neq \beta$: or $\alpha < \beta$ donc $\sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2}$

- $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha < \beta$: donc $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

Finalement on a bien $\alpha \leq \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

grâce à ⊛ on a, pour tout $n \geq 0$,

$$v_n < u_n \Rightarrow v_n \leq v_{n+1} < u_{n+1} < u_n \quad (**)$$

si $b<a$, alors $v_0 < u_0$, donc par récurrence sur n, on obtient (i), et même pour tout $n \geq 0$.

si $a<b$, alors $u_1 = \frac{a+b}{2}$ et $v_1 = \sqrt{ab}$ sont les mêmes que si $b<a$, donc (i) est vérifié pour tout $n \geq 1$, toujours par récurrence sur n, grâce à $(**)$

(ii) pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\frac{\alpha+\beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{2}(\alpha-\beta) \Leftrightarrow \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta \geq \beta^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \geq \beta \\ \text{ou} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

or d'après (i), $\forall n \geq 1$, $u_n > v_n$, donc $\forall n \geq 1$, on a bien (ii)

si $a=b$: montrons $\forall n \geq 0$, $u_n = a = v_n$

$n=0$: ok

$n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} = \frac{a+a}{2} = a$

$v_{n+1} = \sqrt{a^2} = a$ car $a \geq 0$.

Ainsi (i) devient fausse et (ii) devient une égalité.

Q9 * à partir du rang $n=1$, u est décroissante, v est croissante, par (i).

* avec (ii) on obtient que $\forall n \geq 1$, $u_n - v_n \leq \frac{1}{2^n}(u_1 - v_1)$

donc $u_n - v_n \to 0$

* (i) montre aussi que $\forall n \geq 1$, $u_n \geq v_n$

les suites u et v sont donc adjacentes à partir du rang 1, donc convergent vers la même limite.

Q10) a) $M(u_n, v_n)$ est la limite que l'on obtient si on redéfinit les suites u et v par $u'_0 = u_n$, $v'_0 = v_n$ et les mêmes relations de récurrence.

Ainsi u' et v' sont des suites extraites de u et v, donc convergent vers $M(a,b)$

Donc $\underline{M(u_n, v_n) = M(a,b)}$.

b) on a vu précédement que permuter u_0 et v_0 ne changeait pas u_1 et v_1, donc la limite reste la même : $\underline{M(b,a) = M(a,b)}$.

c) il suffit de remarquer que si u_n devient $d.u_n$ et v_n devient dv_n, alors u_{n+1} devient du_{n+1} et v_{n+1} devient dv_n (à condition que $d \geqslant 0$).

Q11) on a $M(a,b) = M(a \times 1, a\frac{b}{a})$ car $a \neq 0$

$= a\,M(1, \frac{b}{a})$ par 2.1.c) car $a > 0$

donc $\underline{M(a,b) = a f(\frac{b}{a})}$

Q12) on sait que $\forall n \geqslant 1$, $v_n \leqslant M(a,b) \leqslant u_n$ car u et v sont adjacentes, il suffit de calculer ~~v_n~~ jusqu'au rang n tel que $\underline{u_n - v_n < 10^{-P}}$.

on va utiliser deux tableaux u et v pour calculer et stoker les valeurs $u_0, u_1, \dots, u_n$ et $v_0, v_1, \dots, v_n$, et les remplir en faisant varier n de 1 au rang où on aura $u_n - v_n < 10^{-P}$, ceci avec une boucle while. Pour un nombre > 1, avec la précision de python pour les flottants IEEE sur 64 bits, p sera forcément limité à 15 (en python, $1 + 10^{-16} = 1$ mais $1 + 10^{-15} \neq 1$)

```
import math
def moyenneAG(p):
    u=[1]
    v=[2]
    n=0
    while abs(u[n]-v[n])>=10.**(-p):
        u=u+[(u[n]+v[n])/2]
        v=v+[math.sqrt(u[n]*v[n])]
        n=n+1
    return(v[n])
```

moyenneAG(15)

donne: 1.4567910310469068