Corrigé
DL limites et continuité

Exercice 1
(3919)

Par les théorèmes généraux, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, on a

$$|f(x)| \leq |\sin x||\sin(1/x)| \leq |x| \times 1 \leq |x|.$$

Par le théorème d'encadrement, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

En remplaçant sin par cos, le procédé précédent ne fonctionne plus puisque $\cos(0) \neq 0$. On va prouver qu'on ne peut pas prolonger g par continuité en 0. Pour cela, on considère les deux suites

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \text{ et } v_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}.$$

Alors les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 0. Cependant,

$$g(u_n) = \cos(u_n)\cos(2n\pi) = \cos(u_n) \to 1$$

tandis que

$$g(v_n) = \cos(v_n)\cos(2n\pi + \pi/2) = 0.$$

Ainsi, $(g(u_n))$ converge vers 1 et $(g(v_n))$ converge vers 0. g n'admet pas de limite en 0 et n'est donc pas prolongeable par continuité en ce point.

Par les théorèmes généraux, h est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Par ailleurs, posant $u = x + 1$, on a

$$\lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{u\to 0} \sin(u)|\ln(u)| = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \times u|\ln(u)| = 1 \times 0 = 0.$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité h en -1 en posant $h(-1) = 0$.

Exercice 2
(3935)

Notons f la fonction qui représente la distance parcourue par le cycliste en fonction du temps (exprimé en minutes). f est une fonction continue, $f(0) = 0$ et $f(60) = 30$. On veut prouver qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes tel que le cycliste a parcouru 10 km. Autrement dit, on veut trouver x dans $[0, 50]$ tel que $f(x+10) - f(x) = 5$. Supposons qu'un tel x n'existe pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on sait alors que : <ul class="rien">

ou bien, pour tout $x \in [0, 50]$, on a $f(x + 10) - f(x) > 5$.

ou bien, pour tout $x \in [0, 50]$, on a $f(x + 10) - f(x) < 5$. Dans le premier cas, on a

$$\begin{aligned} f(60) &= f(60) - f(50) + f(50) - f(40) + f(40) - f(30) + f(30) - f(20) + f(20) - f(10) + f(10) - f(0) \\ &> 6 \times 5 \\ &> 30. \end{aligned}$$

ce qui est une contradiction. Dans le second cas, on trouverait $f(60) < 30$, ce qui constitue également une contradiction. L'hypothèse formulée est donc fausse : il existe $x \in [0, 50]$ tel que $f(x + 10) - f(x) = 5$.

Dans un intervalle de 40 minutes, cela devient faux. Supposons par exemple que le cycliste parcourt 15 kms pendant les 10 premières minutes, se repose pendant 40 minutes, puis parcourt les 15 derniers kilomètres pendant les 10 dernières minutes. Alors, si on prend un intervalle de temps de 40 minutes : <ul class="rien">

ou bien il contient une partie des 10 premières minutes, mais alors il ne comprend aucune partie des 10 dernières minutes, et dans ce cas la distance parcourue est inférieure à 15km.

ou bien il contient une partie des 10 dernières minutes, mais alors il ne comprend aucune partie des 10 premières minutes, et dans ce cas la distance parcourue est inférieure à 15km.

ou bien c'est l'intervalle "central", et dans ce cas la distance parcourue est nulle. Dans tous les cas, on ne peut pas trouver d'intervalle de temps de 40 minutes durant lequel il aura parcouru 20km.

Exercice 3
(58)

(a) $f(2-x)+f(x)=0$ et $f(-x)+f(x)=0$ donc $f(x)=f(x+2)$ donc f est périodique. $f(x/2)=f(x)/2$ donc $f(2x)=2f(x)$. Puisque f est continue et périodique, f est bornée. Or la relation $f(2x)=2f(x)$ implique que f n'est pas bornée dès qu'elle prend une valeur non nulle. Par suite f est nulle. (b) Pour $a=f(1)-f(0)$ et $b=f(0)$, on observe que

$$g(x)=f(x)-(ax+b)$$

est solution du problème posé et s'annule en 0 et 1 donc g est nulle et f affine. La réciproque est immédiate.

Exercice 4
(3914)

On écrit

$$\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}\left(1-\frac{2}{1+x}\right)=\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=\frac{-1}{1+x}.$$

On a levé l'indéterminée, et la limite recherchée vaut donc $-1/2$.

L'astuce est de remarquer que $x-1=(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)$ pour pouvoir simplifier numérateur et dénominateur. On trouve donc

$$\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

et la limite recherchée vaut donc 1/2.

On met en facteur le terme dominant :

$$\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}=\frac{1}{5}\times\frac{1+\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{1+\frac{7}{5x}+\frac{8}{5x^3}}$$

est la limite recherchée est $1/5$.

On utilise la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2+2x}-x=\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\frac{2x}{x\sqrt{1+2/x}+x}=\frac{2}{\sqrt{1+2/x}+1}.$$

La limite recherchée est égale à 2/2=1.

On utilise le changement de variables $u=x^2$. Il vient

$$\lim_{x\to+\infty}x^5e^{-x^2}=\lim_{u\to+\infty}u^{5/2}e^{-u}.$$

Par comparaison de la fonction exponentielle et des fonctions puissance, cette limite vaut 0.

On met en facteur le terme dominant :

$$\frac{x+\cos x}{x+\sin x}=\frac{x\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}=\frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

Mais on a

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

et donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$. De même, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = 1.$$

On met de même en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{x\ln x+7}{x^2+4} = \frac{x\ln x\left(1+\frac{7}{x\ln x}\right)}{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1+\frac{7}{x\ln x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Or, on sait que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\ln x+7}{x^2+4} = 0.$$

On va majorer et conclure par le théorème des gendarmes : pour $x > 0$,

$$\left|\frac{4\sin^2 x+3\cos(5x)}{x}\right| \leq \frac{4\sin^2 x+3|\cos(5x)|}{x} \leq \frac{7}{x}.$$

Par majoration, la limite recherchée est 0.