

DL limites et continuité

Exercice 1

(3919)

Prolongeable par continuité?

Dire si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité à \mathbb{R} tout entier :

$$f(x) = \sin(x) \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0;$$

$$g(x) = \cos(x) \cos(1/x) \text{ si } x \neq 0;$$

$$h(x) = \sin(x+1) \ln|1+x| \text{ si } x \neq -1.$$

Exercice 2

(3935)

Le cycliste

Un cycliste parcourt 30 km en une heure. Démontrer qu'il existe un intervalle de temps de 10 minutes tel que le cycliste a parcouru 5 km. Existe-t-il toujours un intervalle de temps de 40 minutes durant lequel il aura parcouru 20 km?

Exercice 3

(58)

On cherche les fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$$

1. On suppose f solution et $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer que f est périodique et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(2x)$$

En déduire que f est nulle.

2. Déterminer toutes les fonctions f solutions.

Exercice 4

(3914)

Calcul de limites

Étudier les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$ en 1 | 2. $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1 |
| 3. $\frac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$ | 4. $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$ |
| 5. $x^5 e^{-x^2}$ en $+\infty$ | 6. $\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$ |
| 7. $\frac{x \ln x + 7}{x^2 + 4}$ en $+\infty$ | 8. $\frac{4 \sin^2 x + 3 \cos(5x)}{x}$ en $+\infty$. |