Mathématiques

$\boxed{\text{Devoir surveillé n°4}}$

7 décembre 2024

Durée 4h, les seuls dispositifs électriques autorisés sont vos neurones.

Instructions : comme d'habitude : sommaire sur la première page, chaque exercice en haut d'une nouvelle page, encadrer les résultats. Lire tranquillement tout le sujet avant de se jeter sur l'exercice 1. Les questions avec un smiley :) sont plus faciles que les autres (application directe du cours ou des TD).

Exercice 1 : matrices, système linéaire

Les questions sont indépendantes.

Q1 :) Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$

Q2 :) Déterminer l'ensemble E des solutions dans $\mathbb{R}^3$ du système S suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & +y & -2z & = & 1 \\ -2x & -2y & +3z & = & 1 \\ 3x & -y & -2z & = & 5 \end{array} \right.$$

Exercice 2 : ensembles. *Les questions sont indépendantes.*

Q1 :) Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

Q2 :) Combien y-a-t-il d'éléments dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\}))$? Justifier.

Exercice 3 : une bijection complexe

On considère l'application $f : \mathbb{C} - \{2\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z - i}{z - 2}$$

Q1 :) Pour $Z \in \mathbb{C}$ résoudre l'équation $Z = f(z)$ avec $z \in \mathbb{C} - \{2\}$.

Q2 :) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Q3 Déterminer une partie A de $\mathbb{C}$ telle que l'application $g : \mathbb{C} - \{2\} \to A$ définie par $g(z) = f(z)$ soit une bijection.

Q4 Pour $Z \in A$, déterminer l'expression de $g^{-1}(Z)$.

Q5 Montrer que $f(\mathbb{R} - \{2\})$ est une droite du plan complexe privée d'un de ses points, dont on déterminera une équation.

Exercice 4 : EDL2

Les questions sont indépendantes.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

Q1 :) $y'' + y' - 6y = 1 - 8x - 30x^2$

Q2 :) $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$

Problème 1 : diagonalisation de matrice, puissances

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Partie A : polynôme annulateur.

Q1 :) Déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3 = 0$$

Q2 :) En déduire A^{-1}.

Q3 :) Déterminer les racines du polynôme $P = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$.

Partie B : diagonalisation.

Q4 :) Résoudre le système $(A - I_3)X = 0$.

Q5 :) Résoudre le système $(A - 2I_3)X = 0$.

Q6 :) Résoudre le système $(A + 2I_3)X = 0$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Q7 :) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

Q8 :) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.

Q9 :) Déterminer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. On calculera les coefficients de D^n mais pas ceux de A^n.

Q10 Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ (sans calculer ses coefficients).

Problème 2 : une EDL2 à coefficients non constants.

On s'intéresse ici à la résolution sur $I =]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln x$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée.

Partie A : calculs préliminaires

Q1 :) Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

Q2 :) En déduire une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$, telle que $f(x) = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$.

Q3 :) Donner une primitive de $g : I \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = (1-x^2)\ln x$.

Q4 :) Donner une primitive de $h : I \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = x\ln x$.

Partie B : résolution de l'équation homogène.

Q5 :) Montrer que $id : x \mapsto x$ est solution de (E_0).

Q6 Soit $y_0 : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, on pose $z : I \to \mathbb{R}$, telle que $z(x) = \dfrac{1}{x}y_0(x)$.
Montrer que y_0 est solution de (E_0) si, et seulement si, z' est solution de l'équation différentielle en u

$$(E') \quad xu' + \frac{2}{1+x^2}u = 0$$

Q7 :) Résoudre (E').

Q8 Donner l'ensemble des solutions de (E_0).

Partie C : résolution de l'équation par variations des constantes.

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_1(x) = \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)$ où λ et μ sont deux fonctions dérivables sur I et vérifiant $\forall x \in I, x\lambda'(x) + \mu'(x)(x^2-1) = 0$

Q9 Exprimer y_1' et y_1'' en fonction de λ et de μ.

Q10 Montrer que y_1 est solution de (E_0) si, et seulement si, $\forall x \in I, \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x$.

Q11 Déterminer λ' et μ' à l'aide des questions précédentes, puis en déduire une solution particulière y_1 de (E).

Q12 Conclure le problème en donnant l'ensemble des solutions de (E).