DS4 : corrigé.

Exercice 1

Q1

$$(A|I_4) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 19 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$ qui est échelonnée mais non réduite

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 2 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & -8 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & -2 & 8 & -7 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -6 & 14 & -11 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 4 & -11 & 10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{c|cccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4} & \begin{matrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

donc $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ -6 & 14 & -11 & 3 \\ 4 & -11 & 10 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$

(bien symétrique, comme A :)

Q2 La matrice augmentée du système est :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & 7 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

donc $-3z = -3$, $z = 1$, $-y + z = 2$ donc $y = -1$, $2x + y - 2z = 1$

donc $2x = 1 + 1 + 2 = 4$ et $x = 2$

Ainsi $\boxed{E = \{(2, -1, 1)\}}$

Exercice 2

Q1) Soit $x \in E$,

on a $$x \in A-(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A \text{ et } x \notin (B\cap C)$$
$$\Leftrightarrow x\in A \text{ et } (x\notin B \text{ ou } x\notin C)$$
$$\Leftrightarrow (x\in A \text{ et } x\notin B) \text{ ou } (x\in A \text{ et } x \notin C)$$
$$\Leftrightarrow x\in A-B \text{ ou } x\in A-C$$
$$\Leftrightarrow x\in (A-B)\cup(A-C)$$

d'où l'égalité des deux ensembles car ils ont mêmes éléments.

Q2) Il y en a 2 dans $\{0,1\}$, donc 2^2 dans $\mathcal{P}(\{0,1\})$, et donc $2^{2^2}=2^4=\boxed{16}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\}))$.
Ceci car si E a n éléments, $\mathcal{P}(E)$ en a 2^n.

Exercice 3

Q1 on a $Z=f(z) \Leftrightarrow Z=\frac{z-i}{z-2} \Leftrightarrow Z(z-2)=z-i \Leftrightarrow z(Z-1)=2Z-i$

si $Z=1$: $0=2-i$ donc pas de solution.
si $Z\neq 1$: $z=\frac{2Z-i}{Z-1}$: 1 solution unique.

Q2 avec Q1 : f injective, pas surjective (1 n'a pas d'antécédent) et donc non bijective.

Q3 avec Q1 : $g : \mathbb{C}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $z \longmapsto f(z)$ est injective et surjective, donc bijective,

d'où $\boxed{A=\mathbb{C}\setminus\{1\}}$

Q4 toujours avec Q1 : on a si $Z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}$, $Z=f(z)\Leftrightarrow z=g^{-1}(Z)$
et $\Leftrightarrow z=\frac{2Z-i}{Z-1}$

donc $\boxed{g^{-1}(Z)=\frac{2Z-i}{Z-1}}$

Q5

si $z\in\mathbb{R}$, $z\neq 2$, $f(z)=\frac{z-i}{z-2}=\underbrace{\frac{z}{z-2}}_{\in\mathbb{R}}-\underbrace{\frac{1}{z-2}}_{\in\mathbb{R}}i$

donc $f(z)=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$ et $x=\frac{z}{z-2}$, $y=-\frac{1}{z-2}$

et donc $x=\frac{z-2}{z-2}+\frac{2}{z-2}=1-2y$

donc $f(z)$ est sur la droite D d'équation $\boxed{2y+x-1=0}$

mais $f(z)\neq 1$ donc $\boxed{\text{on prive cette droite du point } (1,0)}$

ainsi $\boxed{f(\mathbb{R}-\{2\})\subset D-\{(1,0)\}}$

inversement, si $Z=x+iy$ est sur cette droite, et $Z\neq 1$

alors $x=1-2y$ donc $Z=1-2y+iy=1+y(i-2)$

$g^{-1}(Z)=\frac{2(1+y(i-2))-i}{1+y(i-2)-1}=\frac{2(1+y(i-2))-i}{y(i-2)}$

$=\frac{2-i}{y(i-2)}+2=-\frac{1}{y}+2$ donc $g^{-1}(Z)\in\mathbb{R}$

on a $y\neq 0$ car $y=0 \Rightarrow x=1$ et $Z=1$

ainsi $\boxed{f(\mathbb{R}\setminus\{2\})=D-\{(1,0)\}}$

Exercice 4

Q1 EC : $r^2+r-6=0$, $\Delta = 1-4(-6) = 25 = 5^2$ racines $\frac{-1\pm 5}{2}$

donc $r=-3$ ou 2 d'où $y_0 = \lambda e^{2x} + \mu e^{-3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

second membre polynôme, degré 2, $-6 \neq 0$ donc on cherche une solution

$$\begin{aligned} y_1 &= ax^2+bx+c & \times -6 \\ y_1' &= 2ax+b & \times 1 \\ y_1'' &= 2a & \times 1 \end{aligned}$$

ainsi $-6ax^2 + (-6b+2a)x + (-6c+b+2a) = -30x^2 - 8x + 1 \quad \forall x$

donc $\begin{cases} -6a = -30 \\ -6b+2a = -8 \\ -6c+b+2a = 1 \end{cases}$ $\quad a = 5$

$-6b = -8-2a = -18 \Rightarrow b = 3$

$-6c = 1-b-2a = -12 \Rightarrow c = 2$

d'où $\boxed{y = \lambda e^{2x} + \mu e^{-3x} + 5x^2 + 3x + 2, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

Q2 EC : $r^2+r-2=0$ racines 1 et -2

donc $y_0 = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$, on cherche une solution

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha \cos 2x + \beta \sin 2x : \\ y_1' &= -2\alpha \sin 2x + 2\beta \cos 2x \\ y_1'' &= -4\alpha \cos 2x - 4\beta \sin 2x \end{aligned}$$

donc $(-4\alpha + 2\beta - 2\alpha)\cos 2x + (-4\beta - 2\alpha - 2\beta)\sin 2x = 8 \sin 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $\begin{cases} 2\beta - 6\alpha = 0 \\ -6\beta - 2\alpha = 8 \end{cases}$ donc $\beta = 3\alpha$, $3\beta + \alpha = -4$ $\Rightarrow 10\alpha = -4 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{5}$, $\beta = -\frac{6}{5}$

d'où $\boxed{y = \lambda e^{x} + \mu e^{-2x} - \frac{2}{5}\cos 2x - \frac{6}{5}\sin 2x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

Problème 1 Partie A

Q1)

$$A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}}_{A^2}\underbrace{\begin{pmatrix}3&3&5\\3&-5&-3\\5&-3&3\end{pmatrix}}_{A^3}$$

alors $A^3+\alpha A^2+\beta A+\gamma I_3=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3+3\alpha+\beta+\gamma=0 \\ 3-\alpha+\beta=0 \\ 5+\alpha+\beta=0 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \beta=-4$$

donc $\alpha=-1$

et $\gamma=4$

et dans ce cas les 6 autres équations sont vérifiées.

d'où $\boxed{\alpha=-1,\ \beta=-4,\ \gamma=4}$

Q2) on a $A^3-A^2-4A+4I_3=0 \Rightarrow A(A^2-A-4I_3)=-4I_3$

d'où $A\left(-\frac{1}{4}(A^2-A-4I_3)\right)=I_3$ et donc A inversible avec

$$\boxed{A^{-1}=-\frac{1}{4}A^2+\frac{1}{4}A+I_3}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Q3) on voit que 1 et 2 sont racines évidentes de P,

donc $P=(X-1)(X-2)(X-a)=X^3-X^2-4X+4$, donc avec $X=0$

on a $(-1)\times(-2)\times(-a)=4$ et donc $a=-2$

$\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont donc } 1, 2 \text{ et } -2}$

Partie B

Q4 $(A-I)X=0$ a pour solutions $\{(x,x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

Q5 $(A-2I)X=0$ —— " —— $\{(x,0,x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

Q6 $(A+2I)X=0$ —— " —— $\{(x,-2x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$

Q7 Avec l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \Bigg(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \Bigg| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{6} & \frac{-1}{6} \end{array}}_{P^{-1}} \Bigg)$$

d'où $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$

Q8 on obtient $\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$

Q9 $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1}$ donc $A^n = \underbrace{PD\overbrace{P^{-1}P}^{I}DP^{-1}\cdots PDP^{-1}}_{n}$

d'où $\boxed{A^n = PD^nP^{-1}}$

on a $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}}$

Q10 on a facilement $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ d'où $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$,

$D^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$, donc $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, d'où

$A^{-n} = PD^{-n}P^{-1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, et avec Q30 on a $\boxed{A^n = PD^nP^{-1} \ \forall n\in\mathbb{Z}}$

PROBLEME

I Calculs préliminaires :

Q1 (a) Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{ax^2+a+bx^2+cx}{x(1+x^2)}$$

Ainsi,

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} = \frac{1}{x(1+x^2)}\right)$$
$$\iff \left(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{(a+b)x^2+cx+a}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x(1+x^2)}\right)$$

On résout $\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$. On obtient $a=1$, $b=-1$ et $c=0$.

Q2 Une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ sur I est donc $x \mapsto \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Or, $x \geq 0$ sur I. Ainsi, une primitive de f sur I est donc $x \mapsto \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

Q3 Posons :

$$u'(t) = (1-t^2) \quad \text{et } v(t) = \ln(t)$$
$$\text{d'où } u(t) = t - \frac{t^3}{3} \quad \text{et } v'(t) = \frac{1}{t}$$

Les fonctions $t \mapsto t - \frac{t^3}{3}$ et ln sont C^1 sur I. Ainsi, pour $x \in I$, on a, par intégration parties :

$$\int (1-x^2)\ln x dx = \left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x\right] - \int \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - \left[x - \frac{x^3}{9}\right] + C$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9} + 1 - \frac{1}{9} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Ainsi une primitive de g sur I est $x \mapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9}$.

Q4 Posons :

$$u'(t) = t \quad \text{et } v(t) = \ln(t)$$
$$\text{d'où } u(t) = \frac{t^2}{2} \quad \text{et } v'(t) = \frac{1}{t}$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et ln sont C^1 sur I Ainsi, pour $x \in I$, on a par intégration parties :

$$\int x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right] - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \left[\frac{x^2}{4}\right] + C = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} + C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Ainsi une primitive de h sur I est $x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$.

II Résolution de l'équation sans second membre :

Q5 La fonction y_1 est deux fois dérivable sur I et pour $x \in I$, on a :

$$y_1''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y_1'(x) + \frac{2}{1+x^2}y_1(x) = -\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

donc y_1 est solution de (E_0).

Q6 y est deux fois dérivable sur I donc z est deux fois dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas). Pour $x \in I$, on a :

$$\begin{aligned} & y(x) = xz(x) \\ \text{d'où} \quad & y'(x) = z(x) + xz'(x) \\ \text{puis} \quad & y''(x) = z'(x) + z'(x) + xz''(x) = 2z'(x) + xz''(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left(y \text{ est solution de } (E_0) \text{ sur } I\right) \\ \iff & \left(\forall x \in I,\ y''(x) - \frac{2x}{1+x^2}y'(x) + \frac{2}{1+x^2} = 0\right) \\ \iff & \left(\forall x \in I,\ (2z'(x) + xz''(x)) - \frac{2x}{1+x^2}(z(x) + xz'(x)) + \frac{2}{1+x^2}xz(x) = 0\right) \\ \iff & \cancel{\left(\forall x \in I,\ xz''(x) + 2\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}z'(x) = 0\right)} \\ \iff & \left(\forall x \in I,\ xz''(x) + \frac{2}{1+x^2}z'(x) = 0\right. \\ \iff & \left(z' \text{ est solution de } (E')\right) \end{aligned}$$

Ainsi y est solution de (E_0) si et seulement si z' est solution de (E') $xy' + \frac{2}{1+x^2}y = 0$.

Q7 La solution générale de (E') est $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, où A est une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x(1+x^2)}$.
Ainsi d'après le I-1.b. la solution générale de (E') est $x \mapsto \lambda \exp(-2\ln x + \ln(1+x^2)) = \lambda\frac{1+x^2}{x^2} = \lambda(1 + \frac{1}{x^2})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Q8 On a donc z' de la forme : $x \mapsto \lambda(1 + \frac{1}{x^2})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, z est de la forme $x \mapsto \lambda x - \frac{\lambda}{x} + \mu$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ puis y est de la forme $x \mapsto \lambda(x^2-1) + \mu x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

III Résolution de l'équation :

Q9 y_p est deux fois dérivable comme produit et somme de fonctions qui le sont et pour $x \in I$, on a :

$$y_p'(x) = \lambda'(x)x + \lambda(x) + \mu'(x)(x^2-1) + 2x\mu(x) = \lambda(x) + 2x\mu(x)$$

en utilisant la relation imposée sur λ' et μ'. Puis, pour tout $x \in I$,

$$y_p''(x) = \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x).$$

Q10 On a y_p solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} (1+x^2)\ln x &= \lambda'(x) + 2\mu(x) + 2x\mu'(x) - \frac{2x}{1+x^2}(\lambda(x) + 2x\mu(x)) + \frac{2}{1+x^2}(\lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1)) \\ &= \lambda'(x) + 2x\mu'(x) + \lambda(x)\frac{-2x+2x}{1+x^2} + \mu(x)\frac{2+2x^2-4x^2+2x^2-2}{1+x^2} \\ &= \lambda'(x) + 2x\mu'(x) \end{aligned}$$

Q11 Soit $x \in I$. $(\lambda'(x), \mu'(x))$ est donc solution du système $\begin{cases} x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0 \\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln x \end{cases}$

En effectuant les opérations $L_1 \longleftrightarrow L_2$ puis $L_2 \to L_2 - xL_1$, on obtient : $\begin{cases} \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (1+x^2) \\ -(x^2+1)\mu'(x) = -x(1+ \end{cases}$

On obtient ainsi : $\mu'(x) = \frac{x(1+x^2)\ln x}{1+x^2} = x\ln x$ puis
$\lambda'(x) = (1+x^2)\ln x - 2x\mu'(x) = (1+x^2)\ln(x) - 2x^2\ln(x) = (1-x^2)\ln x$.
On trouve alors (avec le I-2 et le I-3) que pour $\lambda : x \mapsto \left(x - \frac{x^3}{3}\right)\ln x - x + \frac{x^3}{9}$ et $\mu : x \mapsto \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$, on obtient une solution particulière

$$\boxed{\begin{aligned} y_p : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln x - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\ln x - \frac{x^2(x^2-1)}{4} \end{aligned}}$$

Q12

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{D'après ce qui précède, la solution générale de } (E) \text{ sur } I \text{ est} \\ &x \mapsto \left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right)\ln x - x^2 + \frac{x^4}{9} + \frac{x^2(x^2-1)}{2}\ln x - \frac{x^2(x^2-1)}{4} + \lambda(x^2-1) + \mu x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}}$$