Devoir de vacances : suites

Exercice 1 : irrationnalité de e

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et

$$v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

On rappelle que la suite u converge vers $e = \exp(1)$.

Q1. Montrer que les suites u et v sont adjacentes. En déduire qu'elles ont une limite commune qui est e.

On suppose maintenant que e est rationnel, et on pose $e = \dfrac{a}{b}$, avec $a, b \in \mathbb{N}$.

Q2. Montrer que $u_b < e < v_b$.

Q3. En déduire qu'il existe deux entiers naturels p et q tels que $q < p < q + 1$

Q4. Conclure de ce qui précède que e est irrationnel.

Exercice 2 : divergence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

Supposons que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

Q5. En considérant la suite extraite $(\sin(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la suite $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note l' sa limite.

Q6. En utilisant des formules de trigonométrie, exprimer de différentes manières les limites des suites extraites $(\sin(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de l et l'.
En déduire les valeurs possibles de l', puis montrer que $l = 0$ et $l' = 1$.

Q7. Conclure de ce qui précède que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 3 : population de coccinelles.

Soient $k \in \mathbb{R}, k \geqslant 0$, et f la fonction définie sur $I = [0,1]$ par $f(x) = kx(1-x)$.

Q8. À quel condition sur k a-t-on $f(I) \subset I$?

On suppose désormais que $f(I) \subset I$. On considère la suite u donnée par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Q9. La suite u est-elle bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Q10. Étudier la convergence de u en fonction de k et u_0.
On distinguera les cas $k < 1$, $k = 1$, $k \in]1,2]$, $k \in]2,3[$, et $k \in [3,4]$.
Des dessins seront utiles pour soutenir l'intuition !

La fonction f peut être utilisée pour modéliser l'évolution d'une population, par exemple de coccinelles, d'une année sur l'autre. Le paramètre k est donné par l'environnement. L'étude menée ici montre que cette population peut fluctuer : il y a des années sans coccinelles, d'autres où elles pullulent !
On pourra, pour approfondir le sujet, lire ceci :
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/logistiqueDP.pdf`