DM10 Corrigé.

Exercice 1. Irrationalité de e.

Q1 on a clairement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq v_n$,

et $v_n - u_n = \dfrac{1}{n\,n!}$ donc tend vers 0 ; $u_{n+1} \geq u_n$, et

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n\,n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!\,(n+1)n}\left(n - (n+1)^2 + n(n+1)\right) = \frac{-1}{(n+1)!\,(n+1)n} < 0$$

donc v décroît, u croît : $\boxed{\text{ainsi les suites } u \text{ et } v \text{ sont adjacentes et convergent donc vers une même limite, celle de } u\text{, qui est } e.}$

Q2 propriété des suites adjacentes : elles encadrent leur limite :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq e \leq v_n$. Ici comme u et v sont strictement monotones, on a $u_n < e < v_n\ \forall n \in \mathbb{N}$, donc en particulier $\boxed{u_b < e < v_b}$

Q3 on a $u_b < \dfrac{a}{b} < v_b = u_b + \dfrac{1}{b\,b!}$

$\Rightarrow b\,b!\,u_b < a\,b! < b\,b!\,u_b + 1$

or $b!\,u_b = b! \displaystyle\sum_{k=1}^{b} \frac{1}{k!} = b! + \frac{b!}{2} + \frac{b!}{3!} + \cdots + \frac{b!}{b!}$

$= b! + b(b-1)\cdots\times 3 + b(b-1)\cdots\times 4 + \cdots + b(b-1) + b + 1 \in \mathbb{N}$

avec $q = b\,b!\,u_b$ et $p = a\,b!$ on a donc $p, q \in \mathbb{N}$
et $q < p < q+1$

Q4 $q < p < q+1 \Rightarrow 0 < p - q < 1$ or $p - q \in \mathbb{N}$
et il n'a pas d'entier entre 0 et 1 strictement : contradiction

$\boxed{e \text{ n'est donc pas rationnel}}$

Exercice 2 : divergence de $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$

Q5 on a $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

or $\sin 1 \neq 0$ donc $\cos n = \dfrac{1}{\sin 1}\left(\sin(n+1) - \sin n \cos 1\right)$

or $(\sin n)$ et $(\sin(n+1))$ convergent vers ℓ (une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite)

donc par linéarité, $\boxed{(\cos n) \text{ converge}}$ vers une limite ℓ'

avec $\ell' = \dfrac{1}{\sin 1}(\ell - \ell \cos 1) = \boxed{\ell \dfrac{1-\cos 1}{\sin 1} = \ell'}$ (*)

Q6 comme suites extraites on a donc
$\sin 2n \longrightarrow \ell$
$\cos 2n \longrightarrow \ell'$
si $n \longrightarrow +\infty$

or $\sin 2n = 2 \sin n \cos n$
$\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n$ donc $\ell = 2\ell\ell'$
et $\ell' = \ell'^2 - \ell^2$

si $\ell \neq 0$: alors $1 = 2\ell'$, $\ell' = \frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$: faux !

donc $\boxed{\ell = 0}$, et $\ell' = \ell'^2$ donc $\ell'^2 - \ell' = 0$, $\ell'(\ell'-1) = 0$

et $\ell' = 0$ ou 1, or $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$ donc, à la limite, $\ell^2 + \ell'^2 = 1$ donc $\ell'^2 = 1$,

ainsi $\boxed{\ell' = 1}$

Q7 dans (*) de Q5, remplaçons $\ell = 0$ et $\ell' = 1$: on a donc $0 = 1$: absurde !

ainsi $\boxed{(\sin n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge}}$

Exercice 3 : population de coccinelles

Q8] étudions f : f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = k(1-2x)$

$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$ d'où le tableau (car $k \geqslant 0$)

x	0		$1/2$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{k}{4}$	$\searrow$	0

on a alors un maximum en $x = \frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{k}{4}$, et un minimum en 0 et 1 qui est 0, donc :

$f(I) \subset I \iff \frac{k}{4} \leqslant 1 \iff \boxed{k \leqslant 4}$

avec $0 \leqslant k$ rappelons-le

Q9] on a $u_0 \in I$, $f(I) \subset I$, donc, d'après le cours, ou bien avec une récurrence immédiate, on a $\boxed{u_n \text{ définie pour tout } n \in \mathbb{N}}$

Q10] Si $u_0 = 0$, $u = 0$ et u converge vers 0. Dans la suite $u_0 \neq 0$:

$\boxed{k < 1}$: Si $k = 0$, la suite est nulle pour $n \geqslant 1$, donc (u_n) converge vers 0

Soit $x \in I$, et $k > 0$:

on a $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \geqslant -2x \geqslant -2 \Rightarrow 1 \geqslant 1 - 2x \geqslant -1$

donc $k \geqslant k(1-2x) \geqslant -k$ donc $|f(x)| \leqslant k < 1$

Cherchons les points fixes de f :

$x = f(x) \iff x = kx - kx^2 \iff kx^2 + (1-k)x = 0$

$\iff x(kx + 1 - k) = 0 \iff \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 1 - \frac{1}{k}}$

$0 < k < 1 \Rightarrow \frac{k-1}{k} < 0$ donc 0 est le seul point fixe de f dans $[0,1]$

D'après le cours, comme $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant k < 1$,

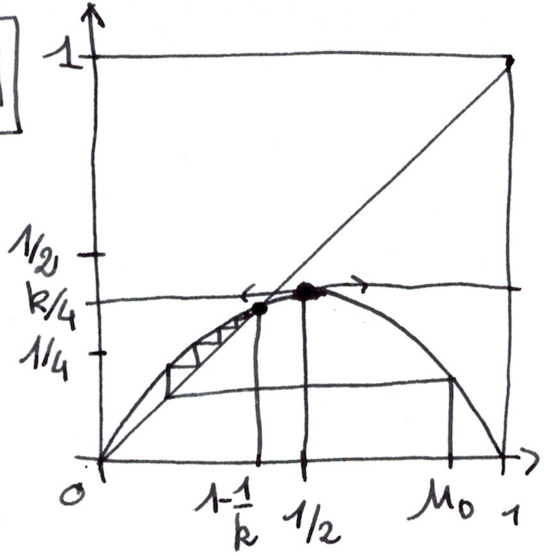
on peut conclure que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0}$ pour $0 \leqslant k < 1$

$\boxed{k = 1}$ on a un seul point fixe de f : 0. On a $f(x) - x = x(1-x) - x = -x^2 \leqslant 0$

donc u décroît, or elle est minorée par 0, donc converge, f continue, donc u converge vers un point fixe de f, donc vers 0 :

$\boxed{u \text{ converge vers } 0}$ pour $k = 1$

$\boxed{k \in]1,2]}$



sur $[0,1]$, f majorée par $\frac{k}{4} \leq \frac{1}{2}$

donc si $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, $u_1 \in [0, 1/2]$

donc $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in [0, 1/2]$

$$f(x) - x = kx(1-x) - x$$
$$= x\left(k - 1 - kx\right)$$

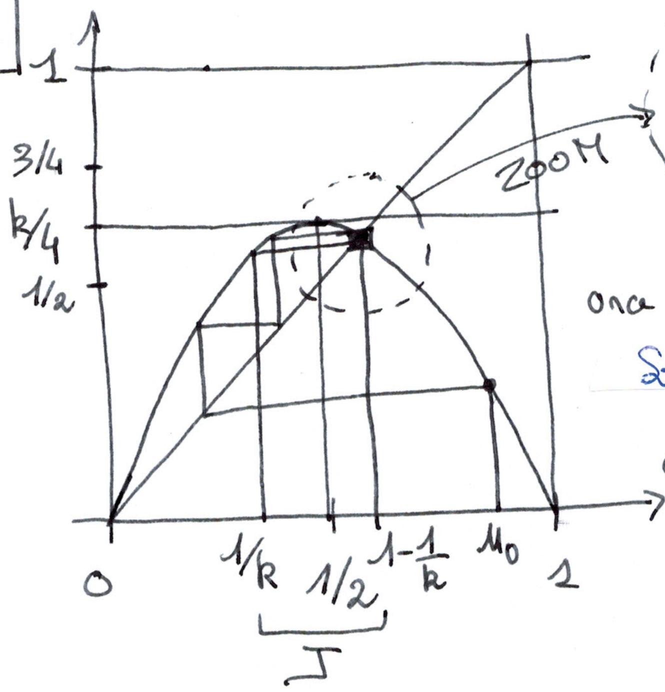
on a $k-1 \geqslant kx$
$\iff 1 - \frac{1}{k} \geqslant x$

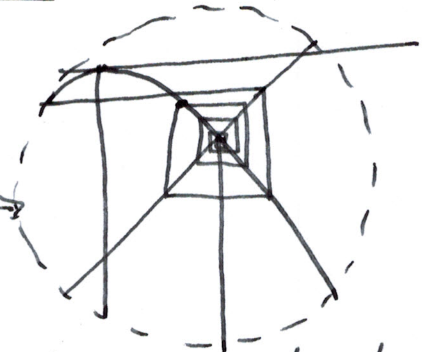
$$\left.\begin{array}{l} \text{donc si } u_n \leq 1 - \frac{1}{k}, \ u_{n+1} \geqslant u_n, \\ \text{et si } u_n \geqslant 1 - \frac{1}{k}, \ u_{n+1} \leq u_n \end{array}\right) (*)$$

f est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc pour $n \geqslant 1$, u est monotone, or u est bornée, donc u converge, et comme f est continue, vers un point fixe de f. Par $(*)$ ce ne peut être 0, car si u croît, elle ne peut converger vers 0, et si u décroît, elle reste $\geqslant 1 - \frac{1}{k} > 0$

Donc $\boxed{u \text{ converge vers } 1 - \frac{1}{k}}$ pour $1 < k \leq 2$

$\boxed{k \in]2,3]}$





On a $k > 2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{k} < \frac{1}{2}$

Soit $J = [\frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k}]$

on montre que $f^2(J) \subset J$
(en utilisant $k \in]2,3]$)
ici f^2 désigne $f \circ f$

Si $u_0 \in J$:

f^2 est croissante sur $[1/2, 1-\frac{1}{k}]$ (car f décroît),

on a $u_0 \in J \Rightarrow u_2 \in [1/2, 1-\frac{1}{k}]$ et

$f^2([1/2, 1-\frac{1}{k}]) \subset [\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{k}]$,

donc $(u_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante, donc converge (car bornée)

et vers un point fixe de $f \neq 0$ donc u_{2n} converge vers $1-\frac{1}{k}$

donc (caractérisation séquentielle des limites),

comme f continue en $1-\frac{1}{k}$, $f(u_{2n})$ converge vers $f(1-\frac{1}{k}) = 1-\frac{1}{k}$

donc (u_{2n+1}) converge vers $1-\frac{1}{k}$. Donc $\boxed{u \text{ converge vers } 1-\frac{1}{k}}$

Si $u_0 \notin J$: * si $u_0 < \frac{1}{k}$, comme $f(x) \geq x$ si $x \leq 1-\frac{1}{k} > \frac{1}{k}$

et u croît tant que $u_n \leq \frac{1}{k}$. Si u croît toujours avec $u_n \leq \frac{1}{k}$, alors, majorée, elle converge vers un point fixe >0 et $< 1-\frac{1}{k}$: absurde. Donc APUCR, $u_n > \frac{1}{k}$.

Soit n tq $u_n < \frac{1}{k} \leq u_{n+1}$, alors $f(u_n) \leq f(\frac{1}{k}) = 1-\frac{1}{k}$ car f croît sur $[0,1/2]$ et $1/k < 1/2$, donc $u_{n+1} \in J$: on est ramené au cas précédent.

* si $u_0 > 1-1/k$:

or f décroît strictement sur $[1/2, 1]$, donc $u_1 < 1-\frac{1}{k}$, et on est ramené au cas $u_0 \in J$ ou $u_0 < \frac{1}{k}$, déjà traités.

Conclusion : $\boxed{u \text{ converge vers } 1-\frac{1}{k}}$ pour $k \in]2,3]$

$k \in]3,4]$: là c'est compliqué (voir le document cité dans le sujet) !

La suite u diverge, sauf quand elle est stationnaire, et cela varie en fonction de u_0, mais de façon très chaotique (= pas continue du tout...)

Finalement : (si $u_0 \neq 0$)

$k=0$: u converge vers 0
$k \in]0,3]$: u converge vers $1-\frac{1}{k}$
$k \in]3,4]$: compliqué et chaotique !