DM4 ensembles, applications

Exercice 1

Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 4x - y = 1\}$ et $C = \{(t+1, 4t+3);\ t \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que $A = C$.

Exercice 2

Soit E un ensemble et A, B, C trois éléments de $\mathcal{P}(E)$.

Démontrer que, si $A \cap B = A \cup B$, alors $A = B$.

Démontrer que, si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$, alors $B = C$. Une seule des deux conditions suffit-elle ?

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$, $(n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 4

Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

$$\begin{array}{llllll}
(i) & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & f(x) = x^2 & (ii) & f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, & f(x) = x^2 \\
(iii) & f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, & f(x) = x^2 & (iv) & f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, & f(x) = x^2 \\
(v) & f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & f(z) = z \cdot \overline{z} & (vi) & f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, & f(z) = |z| \cdot z \\
(vii) & f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & f(n) = n^2 & (viii) & f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, & f(n) = n^2 \\
(ix) & f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, & f(n) = n+1 & (x) & f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, & f(n) = n+1
\end{array}$$

Exercice 5

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
2. Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On considère le sous-ensemble suivant de E :

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}.$$

   Montrer qu'il n'existe pas d'élément a de E tel que $A = f(a)$. En déduire qu'il n'existe pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.