Corrigé
TD DL DA branches infinies

Exercice 1
(3640)

On commence par l'étude au voisinage de $+\infty$. On met x^2 en facteur sous les racines pour se ramener à effectuer un développement limité en 0 :

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}(1/x)\right).$$

De même,

$$\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = x\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}(1/x)\right).$$

On en déduit :

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}(1/x).$$

La courbe d'équation $y = 2x$ est donc asymptote à la courbe au voisinage de $= +\infty$. Pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut pousser le développement limité un peu plus loin...jusqu'à obtenir le premier terme non nul !

$$\sqrt{x^2+1} = x\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}(1/x)\right),$$

$$\sqrt{x^2-1} = x\left(1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}(1/x)\right),$$

ce qui donne :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3}(1/x).$$

Au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{x^3}(1/x)$ est négatif : la courbe est sous l'asymptote. L'étude au voisinage de $-\infty$ peut se faire en remarquant que la fonction étudiée est paire. On en déduit alors que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$, et que la courbe est située au-dessous de son asymptote.

Exercice 2
(3642)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$ est dérivable, et sa dérivée vérifie $f'(x) = e^x + 1 > 0$. Puisque $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique élément $u_n \in \mathbb{R}$ pour lequel $f(u_n) = n$.

Puisque f est strictement croissante et que $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f^{-1} est aussi strictement croissante et vérifie également $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Puisque $u_n = f^{-1}(n)$, on en déduit par passage à la limite que $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$.

Le point clé est de remarquer que, puisque u_n tend vers $+\infty$, on a $u_n = o(e^{u_n})$. De l'équation $e^{u_n} + u_n = n$, on en déduit

$$e^{u_n} + o(e^{u_n}) = e^{u_n}(1 + o(1)) = n.$$

On prend alors le logarithme de cette expression, et on trouve

$$u_n \ln(1 + o(1)) = \ln n$$

soit

$$u_n + o(u_n) = \ln n$$

ce qui dit bien que $u_n \sim \ln n$.

On pose donc $v_n = u_n - \ln n$ et on écrit que

$$e^{\ln n + v_n} + \ln n + v_n = n.$$

En isolant e^{v_n} dans l'expression précédente, on obtient

$$e^{v_n} = 1 - \frac{\ln n}{n} - \frac{v_n}{n} = 1 - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Il suffit de prendre le logarithme de cette expression et d'utiliser le développement limité à l'ordre 1 de $\ln(1-x)$ pour trouver que

$$v_n = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Ceci donne bien le développement asymptotique demandé pour u_n.

Exercice 3
(3657)

Les techniques classiques de calcul montrent que :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3(x).$$

Au point d'abscisse 0, on a $f(0) = 1/2$, f est dérivable et vérifie $f'(0) = -1/4$. Le graphe est donc tangent à la droite d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.

Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{48}x^3 + x^3(x).$$

Si x est assez petit, cette quantité est positive pour $x > 0$, et négative pour $x < 0$: la courbe traverse sa tangente.

Exercice 4
(3658)

On va effectuer un DL jusqu'à l'ordre 3 de f. Pour cela, on écrit

$$f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

et posons $u = x + \frac{x^2}{2}$. On a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, et

$$\begin{aligned} u &= x + \frac{x^2}{2} \\ u^2 &= x^2 + x^3 + o(x^3) \\ u^3 &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

La courbe représentative de f admet donc au point $(0, \ln 2)$ une tangente d'équation $y = \ln 2 + x$. De plus,

$$f(x) - (\ln 2 + x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Cette différence est donc positive au voisinage de 0^-, et négative au voisinage de 0^+. La courbe traverse donc sa tangente en $(0, \ln 2)$.

Exercice 5
(3659)

Remplaçons les cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques par leur développement en fonction de l'exponentielle. On obtient

$$f(x) = \frac{xe^x - e^x + xe^{-x} + e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 2}.$$

On met en facteur e^x, d'où

$$f(x) = \frac{x - 1 + xe^{-2x} + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}.$$

Ce qui nous intéresse, ce sont les termes en x et les termes constants. On peut donc écrire

$$f(x) = \frac{x - 1 + o(1)}{1 + o(1)}.$$

Il vient

$$f(x) = x - 1 + o(1).$$

La droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. Si on cherche en plus la position par rapport à l'asymptote, on doit pousser un cran plus loin. On trouve

$$f(x) = \frac{x - 1 + o(e^{-x})}{1 - 2e^{-x} + o(e^{-x})} = (x - 1 + o(e^{-x}))(1 + 2e^{-x} + o(e^{-x}) = (x - 1) + 2xe^{-x} + o(e^{-x}).$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

Posons $u = 1/x$. Pour $x \to +\infty$, u est voisin de 0. On a

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3),$$

soit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o(x^{-3})\right) \\ &= x - \frac{1}{2} + \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, la droite d'équation $y = x - 1/2$ est asymptote à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$ et la courbe est au-dessus de son asymptote (au voisinage de l'infini).

On pose encore $u = 1/x$, et on obtient

$$h(x) = \frac{1 + \frac{1}{u}}{1 + e^u} = \frac{1 + 1/u}{2 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)}.$$

On calcule alors le développement limité avec les techniques usuelles et on trouve que

$$h(x)=\frac{1}{2u}+\frac14-\frac{u}{4}+o(u)=\frac{x}{2}+\frac14-\frac{1}{4x}+o\left(\frac1x\right).$$

La droite d'équation $y=\frac{x}{2}+\frac14$ est asymptote à la courbe représentative de h, et la courbe est sous son asymptote (au voisinage de l'infini).

On effectue un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que :

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Il vient :

$$\begin{aligned} x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) &= x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= x+2+\frac{2}{x}+o\left(\frac1x\right). \end{aligned}$$

La droite d'équation $y=x+2$ est donc asymptote à la courbe représentative de u au voisinage de $+\infty$, et la courbe est située au-dessus de son asymptote.

Exercice 6
(3660)

On fait un développement limité en 0 à un ordre suffisamment grand pour qu'on puisse distinguer les fonctions. Ici, il suffit d'aller jusqu'à l'ordre 2. Le point le plus difficile est pour $h(x)$. Mais

$$1-2\sin x=1-2x+o(x^2)$$

de sorte que

$$h(x)=1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

Pour les autres, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-x+x^2+o(x^2)\\ g(x) &= 1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\ k(x) &= 1-x+\frac{x^2}{6}+o(x^2) \end{aligned}$$

En comparant donc les termes d'ordre 2, on trouve $h\leq k\leq g\leq f$. Les courbes représentatives sont bien sûr dans le même ordre.

Exercice 7
(3664)

Soit, pour $x\geq 0$, la fonction $g(x)=\tanh(x)-x$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée

$$g'(x)=1-\tanh^2 x-1=-\tanh^2 x<0.$$

La fonction g est donc strictement décroissante et puisque $g(0)=0$, on en déduit que $g(x)<0$ pour tout $x>0$.

Un calcul direct prouve que

$$f'(x) = \left(\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right)\cosh\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme cosh est strictement positive, on trouve d'après la question précédente que f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Calculons ses limites en 0 et en $+\infty$. <ul class="rien">

en 0 : on pose $u = 1/x$, et on a

$$x\sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} = \frac{e^u - e^{-u}}{2u}.$$

Or, $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ par croissances comparées, et $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{-u}}{u} = 0$. Finalement, on trouve que $\lim_0 f = +\infty$.

en $+\infty$: on pose encore $u = 1/x$, de sorte que

$$x\sinh(x) = \frac{\sinh u}{u} \sim_0 \frac{u}{u} = 1.$$

Ainsi, $\lim_{+\infty} f = 1$.

C'est du cours, en utilisant le DL à l'ordre 3 de $\sinh u$:

$$\frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2).$$

On pose $u = 1/x$ et on utilise le résultat de la question précédente. Donc, au voisinage de $+\infty$, on a

$$f(x) = \frac{\sinh u}{u} = 1 + \frac{u^2}{6} + o(u^2) = 1 + \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. C'est donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]\lim_{+\infty} f, \lim_0 f[=]1,+\infty[$. Comme $(n+1)/n \in]1,+\infty[$, on a bien l'existence d'un unique u_n avec $f(u_n) = \frac{n}{n+1}$.

On sait que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{n+1}{n} \geq \frac{n+2}{n+1},$$

c'est-à-dire

$$f(u_n) \geq f(u_{n+1}).$$

La fonction f étant décroissante, ceci signifie que

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

Première rédaction : on écrit $u_n = f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$. Puisque $\frac{n+1}{n} \to 1$ et que f^{-1} admet une limite en 1, on en déduit par composition des limites que

$$\lim_{+\infty} u_n = \lim_1 f^{-1} = +\infty.$$

Deuxième rédaction : la suite (u_n) étant croissante, ou bien elle tend vers $+\infty$, ou bien elle est majorée. Si elle est majorée disons par M, alors on a, puisque f est décroissante, pour tout entier n,

$$\frac{n}{n+1} = f(u_n) \geq f(M).$$

Passons à la limite : on obtient $1 \geq f(M)$. Mais $f(M) > 1$ et on a donc une contradiction. Ainsi, (u_n) ne peut pas être majorée, et elle tend donc vers $+\infty$.

Puisque $u_n \to +\infty$, il est légitime d'introduire u_n dans l'expression du développement asymptotique de f trouvé un peu plus haut. On a donc :

$$f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right).$$

On remplace $f(u_n)$ par $1 + 1/n$ et on obtient

$$\frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{n}$$

soit $\frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{1}{n}$, donc $\frac{6u_n^2}{n} \to 1$, soit encore, en prenant la racine carrée,

$$\frac{\sqrt{6}u_n}{\sqrt{n}} \to 1.$$

Finalement, on a prouvé que

$$u_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{n}{6}}.$$

Exercice 8
(3665)

Posons f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$. Elle est continue et strictement croissante comme somme de fonctions continues et strictement croissantes. De plus, $\lim_{0^+} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. f réalise donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution x_n. De plus, on a $f(x_n) = n < f(x_{n+1}) = n+1$. Puisque f est strictement croissante, ceci entraîne $x_n < x_{n+1}$, et donc (x_n) est strictement croissante.

Remarquons que

$$f(\ln n) = \ln(n) + \ln(\ln(n)) \leq 2\ln(n) < n = f(x_n)$$

pour n assez grand. Ainsi, pour n assez grand, on a $x_n \geq \ln n$ et donc f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

On peut écrire $x_n = n - \ln(x_n)$. Or, (x_n) tend vers $+\infty$ et donc $\ln(x_n) = o(x_n)$. Autrement dit, on a

$$x_n \sim n.$$

Posons a_n défini par $\frac{x_n}{n} = 1 + a_n$. La relation $x_n + \ln(x_n) = n$ donne alors $na_n + \ln(n) + \ln(1+a_n) = 0$, soit

$$a_n = -\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1+a_n)}{n}.$$

Or, $a_n \to 0$ et donc $\ln(1+a_n) = o(\ln n)$, ce qui donne

$$a_n = -\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

ce qui, reporté dans x_n, donne exactement le bon résultat.

On procède de la même façon, en définissant cette fois une suite (b_n) par

$$\frac{x_n - n}{-\ln n} = 1 + b_n,$$

avec (b_n) qui tend vers 0, soit encore

$$x_n = n - \ln(n)\left(1 + b_n\right).$$

L'égalité $x_n + \ln(x_n) = n$ donne

$$\begin{aligned} \ln(n)b_n &= \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}(1 + b_n)\right) \\ &\sim -\frac{\ln(n)}{n}(1 + b_n) \\ &\sim -\frac{\ln(n)}{n} \end{aligned}$$

puisque $\dfrac{\ln n}{n}(1 + b_n)$ tend vers 0, et que (b_n) tend aussi vers 0. Il vient $b_n \sim \dfrac{-1}{n}$, soit $b_n = \dfrac{-1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, ce qui en reportant dans x_n donne le résultat voulu.

Toutes sont vraies, sauf la dernière.... Il suffit de revenir à la définition...