TD Développements limités, études locales de courbes

Exercice 1
(3640)
Branches infinies

A l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

Exercice 2
(3646)
Somme et produit de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0 **2**. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0 **4**. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0
5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0 **6**. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 3
(3647)
Quotient de DLs

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 **4**. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 4
(3648)
Composition de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0 **4**. $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 5
(3649)
Intégration de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2**. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 6
(3650)
DLs pas en 0 !

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2 **2.** $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2
3. e^x à l'ordre 3 en 1 **4.** $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$
5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2

Exercice 7
(3651)
DL en l'infini

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$ **2.** $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

Exercice 8
(3653)
Développement limité d'une fonction réciproque

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\exp(x^2)$.

Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.

Donner ce développement limité.

Exercice 9
(3656)
Limites de fonctions

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0; **2.** $\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$ en 0;
3. $\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0; **4.** $\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0;
5. $\frac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$ en 0; **6.** $\frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}$ en 0^+;

Exercice 10
(3657)
Étude locale d'une courbe

Soit f la fonction définie sur par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.

En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.

Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Exercice 11
(3658)
Position relative d'une courbe et de sa tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

Exercice 12
(3659)
Asymptotes

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \dfrac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$ **2**. $g(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

3. $h(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$ **4**. $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

Exercice 13
(3661)
Dérivée n-ième en 0

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{1+x^6}$. Déterminer $f^{(n)}(0)$.