Corrigé
TD Développements limités, études locales de courbes

Exercice 1
(3640)

On commence par l'étude au voisinage de $+\infty$. On met x^2 en facteur sous les racines pour se ramener à effectuer un développement limité en 0 :

$$\sqrt{x^2+1} = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = x\left(1+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}(1/x)\right).$$

De même,

$$\sqrt{x^2-1} = x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = x\left(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^2}(1/x)\right).$$

On en déduit :

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x}(1/x).$$

La courbe d'équation $y = 2x$ est donc asymptote à la courbe au voisinage de $= +\infty$. Pour obtenir la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote, il faut pousser le développement limité un peu plus loin...jusqu'à obtenir le premier terme non nul !

$$\sqrt{x^2+1} = x\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}(1/x)\right),$$

$$\sqrt{x^2-1} = x\left(1-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{x^4}(1/x)\right),$$

ce qui donne :

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4x^3} + \frac{1}{x^3}(1/x).$$

Au voisinage de $+\infty$, $-\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{x^3}(1/x)$ est négatif : la courbe est sous l'asymptote. L'étude au voisinage de $-\infty$ peut se faire en remarquant que la fonction étudiée est paire. On en déduit alors que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote à la courbe au voisinage de $-\infty$, et que la courbe est située au-dessous de son asymptote.

Exercice 2
(3646)

Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+o(x^3)\\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x} - e^x = \frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\\ \sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :
$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4).$$

On écrit

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\\ \cos(2x) &= 1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par x, et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit
$$\sin(x)\cos(2x)=x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121x^5}{120}+o(x^6).$$

On écrit les développements limités

$$\begin{aligned}\cos x &= 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\end{aligned}$$

et on effectue le produit pour trouver

$$(\cos x)\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^4).$$

C'est la même méthode, encore plus facile car $1+x^3=1+x^3+o(x^3)$. Puisque d'autre part

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o(x^3)$$

on trouve en effectuant le produit

$$(1+x^3)\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{15x^3}{16}+o(x^3).$$

Puisque $\ln(1+x)\sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

on trouve
$$\big(\ln(1+x)\big)^2=x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}+o(x^4).$$

Exercice 3
(3647)

On pose $u=x+x^2$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, et on utilise

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+u^4+o(u^4).$$

On calcule les puissances de u, mais bien sûr on les tronque à l'ordre 4. On trouve :

$$\begin{array}{rcl} u & = & x+x^2 \\ u^2 & = & x^2+2x^3+x^4 \\ u^3 & = & x^3+3x^4+o(x^4) \\ u^4 & = & x^4+o(x^4) \end{array}$$

Ainsi, en remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2}=1-x+x^3-x^4+o(x^4).$$

On commence par calculer le DL (à l'ordre 4 simplement !) de $g(x)=\dfrac{1}{\cos x}$. Pour cela, on remarque que

$$g(x)=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=\frac{1}{1-u}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}+o(x^4) \\ u^2 & = & \dfrac{x^4}{4}+o(x^4) \end{array}$$

On déduit du DL de $\dfrac{1}{1-u}$ que

$$g(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4).$$

On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

et on trouve

$$\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o(x^5).$$

A l'ordre 2, on a

$$\cos(x)+1=2-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x+1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)}=\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

On multiplie ce DL par celui de $\sin x-1$

$$\sin x-1=-1+x+o(x^2).$$

On trouve finalement

$$\frac{\sin x-1}{2+\cos x}=-\frac{1}{2}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).$$

Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en x vont se simplifier. On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}=\frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}=1+\frac{x^2}{6}+o(x^3)$$

puis le produit et on trouve finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

Exercice 4
(3648)

On commence par écrire

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$

On peut donc écrire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln(1+u) \text{ avec } u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$

En particulier, on remarque que $o(u^2)=o(x^4)$. De plus, on sait que

$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$

On calcule les puissances de u, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,

$$u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$

$$u^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4).$$

Il vient

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{-x^2}{6}+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{2\times 36}\right)x^4+o(x^4)\\ &= \frac{-x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4).\end{aligned}$$

On pose $u=\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$. u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut bien écrire que

$$\exp(u)=1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+\frac{u^4}{24}+o(u^4).$$

Mais,

$$\begin{aligned}u &= x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\\ u^2 &= x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4)\\ u^3 &= x^3+o(x^4)\\ u^4 &= x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

En remplaçant, on trouve
$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

On écrit
$$(\cos x)^{\sin x} = \exp\big(\sin x \ln(\cos x)\big).$$
On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit ! Soit d'abord $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On a
$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$
D'autre part,
$$\begin{array}{rcl} u &=& -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ u^2 &=& \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ u^3 &=& o(x^5) \\ u^4 &=& o(x^5) \\ u^5 &=& o(x^5) \end{array}$$
Il vient
$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$
On en déduit
$$\begin{array}{rcl} \sin(x)\ln(\cos x) &=& \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) \\ &=& -\frac{x^3}{2} + o(x^5) \end{array}$$
Finalement, on pose $v = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$, et on voit que $v^2 = o(x^5)$. On obtient donc
$$\exp\big(\sin x \ln(\cos x)\big) = \exp(v) = 1 + v + O(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5).$$
Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre !

On commence par étudier le DL de $\frac{1}{x}\ln(\cosh x)$. Au voisinage de 0, le DL à l'ordre 4 du cosinus hyperbolique est donné par
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$
Celui de $\ln(1+u)$ est donné par
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$
Il est n'est pas nécessaire d'aller plus loin, car en posant $u = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$, on a déjà $o(u^2) = o(x^4)$. Puisque $u^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)$, on a en introduisant dans le DL de $\ln(1+u)$:
$$\frac{1}{x}\ln(\cosh x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)$$

(on se contente de DLs à l'ordre 3 car on va les multiplier par x à la fin). Pour trouver le DL de $(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$, on doit encore composer par l'exponentielle :

$$\exp(v) = v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + o(v^3)$$

avec

$$\begin{aligned} v &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) \\ v^2 &= \frac{x^2}{4} + o(x^3) \\ v^3 &= \frac{x^3}{8} + o(x^3). \end{aligned}$$

On trouve donc

$$(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o(x^3).$$

Pour la fonction initiale, ceci donne

$$x(\cosh x)^{\frac{1}{x}} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{16} + o(x^4).$$

Exercice 5
(3649)

La fonction arccos est dérivable en 0, et sa dérivée vaut

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette fonction est de classe C^∞ autour de 0, elle admet au moins un développement limité à l'ordre 4 en 0. Pour le calculer, on commence par écrire que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Posons $u = x^2 + x^4 + o(x^4)$ et remarquons que $u^2 = x^4 + o(x^4)$. Du développement limité de $\sqrt{1+u}$,

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2),$$

on déduit que

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1 - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

On intègre ce développement limité. Tenant compte de $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

La méthode est similaire. On remarque que

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

En intégrant, on trouve que
$$\int_0^x e^{t^2}dt = 0 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} + o(x^5).$$

Exercice 6
(3650)

On pose $x = 2 + h$, d'où
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o(h^3).
\end{aligned}$$

En revenant à x, on obtient
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o\big(x-2)^3\big).$$

On pose $x = 2 + h$, on factorise par 2 et on utilise les propriétés de la fonction logarithme :
$$\begin{aligned}
\ln(2+h) &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{h}{2}\right) \\
&= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24} + o(h^3).
\end{aligned}$$

Revenant à x, cela s'écrit encore
$$\ln(x) = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o\big((x-2)^3\big).$$

On pose $x = 1 + h$, et on écrit
$$\begin{aligned}
e^{1+h} &= e^1 e^h \\
&= e^1 + e^1 h + \frac{e^1}{2}h^2 + \frac{e^1}{6}h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

Retournant à x, on en déduit que
$$e^x = e^1 + e^1(x-1) + \frac{e^1}{2}(x-1)^2 + \frac{e^1}{6}(x-1)^3 + o\big((x-1)^3\big).$$

On pose $x = \frac{\pi}{3} + h$. Par une formule de trigonométrie :
$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos h - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin h \\
&= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{sqrt3}{12}h^3 + o(h^3) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{h^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

Revenant en x, on déduit

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

On pose $x = 2 + h$, d'où

$$\begin{aligned} \sqrt{2+h} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)\right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}h - \frac{\sqrt{2}}{32}h^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}h^3 + o(h^3). \end{aligned}$$

En revenant à x, on a

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3).$$

Exercice 7
(3651)

On pose $u = \dfrac{1}{x}$, de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+2u} \\ &= 1 + u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} + o(u^3) \\ &= 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

On commence par écrire

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x = \ln\left(1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

On pose alors $u = \dfrac{1}{x}$, puis on écrit, pour se ramener à un DL du logarithme en 0,

$$\ln\left(1 + \sqrt{1+u^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2} = \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} + o(u^4)$$

d'où, par composition de DLS,

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{32} + o(u^4).$$

Revenant à la fonction initiale, on trouve

$$\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x = \ln 2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Exercice 8
(3653)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\exp(x^2)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(x) = (2x^2 + 1)\exp(x^2) > 0.$$

En particulier, f est strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Puisque f est de plus continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

f' ne s'annulant pas, on en déduit que f^{-1} est de classe C^∞, et donc admet un développement limité à tout ordre en 0.

On remarque d'abord que $f^{-1}(0) = 0$. Écrivons le DL de f^{-1} en 0 sous la forme

$$f^{-1}(y) = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + o(y^4).$$

On a de plus

$$f(x) = x + x^3 + o(x^4).$$

Posons $y = x + x^3 + o(x^4)$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} y & = & x + x^3 + o(x^4) \\ y^2 & = & x^2 + 2x^4 + o(x^4) \\ y^3 & = & x^3 + o(x^4) \\ y^4 & = & x^4 + o(x^4). \end{array}$$

Il vient

$$f^{-1}(f(x)) = ax + bx^2 + (a + c)x^3 + (2b + d)x^4 + o(x^4).$$

Mais,

$$f^{-1}(f(x)) = x = x + o(x^4).$$

Par unicité des développements limités, on en déduit que $a = 1$, $b = 0$, $a + c = 0$ et $2b + d = 0$. On obtient finalement le DL suivant pour la fonction f^{-1} :

$$f^{-1}(y) = y - y^3 + o(y^4).$$

On aurait pu, pour simplifier un tout petit peu les calculs, remarquer que la fonction f^{-1}, tout comme la fonction f, est impaire, et donc que les coefficients d'ordre pair du DL sont nuls.

Exercice 9
(3656)

Effectuons un développement limité du numérateur à l'ordre 3. On a

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1).$$

La limite recherchée est $-1/6$.

Effectuons un développement limité du numérateur et du dénominateur à l'ordre 2. On a

$$\frac{1 + \ln(1 + x) - e^x}{1 - \cos x} = \frac{1 + x - \frac{x^2}{2} - 1 - x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = 2 + o(1).$$

La limite recherchée est donc égale à 1.

On passe au logarithme :

$$\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{2}\left(e^{x\ln a}+e^{x\ln b}\right)\right)=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{2}\big(\ln a+\ln b\big)\right)\sim_0\frac{1}{x}\frac{x}{2}\ln(ab).$$

Repassant par l'exponentielle, on trouve que la limite recherchée est

$$\exp\left(\frac{1}{2}\ln(ab)\right)=\sqrt{ab}.$$

Il suffit d'écrire

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=x+o(x)-(-x+o(x))=2x+o(x).$$

La limite recherchée est donc égale à 1.

Rappelons les développements limités à l'ordre 3 de sin et tan :

$$\begin{array}{rcl}\sin(x)&=&x-x^3/6+o(x^3)\\ \tan(x)&=&x+x^3/3+o(x^3)\end{array}$$

On en déduit que

$$\exp(\sin x)=\exp\big(x-x^3/6+o(x^3)\big)=\exp(x)\exp\big(-x^3/3+o(x^3)\big)=\exp(x)\left(1-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)$$

où on a utilisé le DL de $\exp(u)=1+u+o(u)$ et où on a composé les développements limités. Avec la même méthode, on trouve

$$\exp(\tan x)=\exp(x)\left(1+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right).$$

Il vient :

$$\frac{\exp(\sin x)-\exp(\tan x)}{\sin x-\tan x}=\exp(x)\frac{-x^3/6-x^3/3+o(x^3)}{-x^3/6-x^3/3+o(x^3)}=\exp(x)\frac{1+o(1)}{1+o(1)}\to 1$$

lorsque x tend vers 0.

On écrit

$$x^{x^x}\ln x=\exp(x\ln(x^x))\ln x=\exp(x^2\ln x)\ln x.$$

Puisque $x^2\ln x$ tend vers 0 en 0^+, on en déduit que $\exp(x^2\ln x)$ tend vers 1 et donc que

$$x^{x^x}\sim_{0^+}\ln x.$$

D'autre part,

$$x^x-1=\exp(x\ln x)-1=1+x\ln x+o(x\ln x)-1=x\ln x+o(x\ln x),$$

la composition des développements limités étant légitime puisque $x\ln x$ tend vers 0 en 0^+. On en déduit que

$$\frac{x^{x^x}\ln x}{x^x-1}\sim_{0^+}\frac{\ln x}{x\ln x}=\frac{1}{x}$$

et donc que la fonction tend vers $+\infty$ en 0^+.

Exercice 10
(3657)

Les techniques classiques de calcul montrent que :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3(x).$$

Au point d'abscisse 0, on a $f(0) = 1/2$, f est dérivable et vérifie $f'(0) = -1/4$. Le graphe est donc tangent à la droite d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.

Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{48}x^3 + x^3(x).$$

Si x est assez petit, cette quantité est positive pour $x > 0$, et négative pour $x < 0$: la courbe traverse sa tangente.

Exercice 11
(3658)
On va effectuer un DL jusqu'à l'ordre 3 de f. Pour cela, on écrit

$$f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

et posons $u = x + \frac{x^2}{2}$. On a $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$, et

$$\begin{aligned} u &= x + \frac{x^2}{2} \\ u^2 &= x^2 + x^3 + o(x^3) \\ u^3 &= x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$f(x) = \ln 2 + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

La courbe représentative de f admet donc au point $(0, \ln 2)$ une tangente d'équation $y = \ln 2 + x$. De plus,

$$f(x) - (\ln 2 + x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Cette différence est donc positive au voisinage de 0^-, et négative au voisinage de 0^+. La courbe traverse donc sa tangente en $(0, \ln 2)$.

Exercice 12
(3659)

Remplaçons les cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques par leur développement en fonction de l'exponentielle. On obtient

$$f(x) = \frac{xe^x - e^x + xe^{-x} + e^{-x}}{e^x + e^{-x} - 2}.$$

On met en facteur e^x, d'où

$$f(x) = \frac{x - 1 + xe^{-2x} + e^{-2x}}{1 - 2e^{-x} + e^{-2x}}.$$

Ce qui nous intéresse, ce sont les termes en x et les termes constants. On peut donc écrire

$$f(x)=\frac{x-1+o(1)}{1+o(1)}.$$

Il vient

$$f(x)=x-1+o(1).$$

La droite d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. Si on cherche en plus la position par rapport à l'asymptote, on doit pousser un cran plus loin. On trouve

$$f(x)=\frac{x-1+o(e^{-x})}{1-2e^{-x}+o(e^{-x})}=(x-1+o(e^{-x}))(1+2e^{-x}+o(e^{-x})=(x-1)+2xe^{-x}+o(e^{-x}).$$

Au voisinage de $+\infty$, la courbe est au-dessus de son asymptote.

Posons $u=1/x$. Pour $x\to+\infty$, u est voisin de 0. On a

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o(u^3),$$

soit

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+o(x^{-3})\right)\\ &= x-\frac{1}{2}+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Autrement dit, la droite d'équation $y=x-1/2$ est asymptote à la courbe représentative de g au voisinage de $+\infty$ et la courbe est au-dessus de son asymptote (au voisinage de l'infini).

On pose encore $u=1/x$, et on obtient

$$h(x)=\frac{1+\frac{1}{u}}{1+e^u}=\frac{1+1/u}{2+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)}.$$

On calcule alors le développement limité avec les techniques usuelles et on trouve que

$$h(x)=\frac{1}{2u}+\frac{1}{4}-\frac{u}{4}+o(u)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La droite d'équation $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}$ est asymptote à la courbe représentative de h, et la courbe est sous son asymptote (au voisinage de l'infini).

On effectue un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on remarque que :

$$\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{2}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Il vient :

$$\begin{aligned} x\exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) &= x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\ &= x+2+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

La droite d'équation $y=x+2$ est donc asymptote à la courbe représentative de u au voisinage de $+\infty$, et la courbe est située au-dessus de son asymptote.

Exercice 13
(3661)
Remarquons que la fonction est de classe C^∞. Par la formule de Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre n en 0, et le coefficient devant x^n est $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. D'autre part, on a :

$$\frac{x^4}{1+x^6} = x^4 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{6k} + o(x^{6n+4}).$$

Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, si $n \equiv 4 \mod 6$, alors $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{(n-4)/6}$, sinon, $f^{(n)}(0) = 0$.