# TD DL DA branches infinies

## Exercice 1

**(3640)**

Branches infinies

A l'aide des développements limités, déterminer les asymptotes éventuelles et la position relative par rapport aux asymptotes de la courbe représentative de la fonction :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

## Exercice 2

**(3642)**

Suite implicite - exponentielle

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera $u_n$.

Montrer que la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$.

Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \ln n$.

En étudiant $v_n = u_n - \ln n$, montrer que

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

## Exercice 3

**(3657)**

Étude locale d'une courbe

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.

Donner un développement limité de $f$ à l'ordre 3 en zéro.

En déduire que la courbe représentative de $f$ admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.

Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

## Exercice 4

**(3658)**

Position relative d'une courbe et de sa tangente

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de $f$ au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.

## Exercice 5

**(3659)**

Asymptotes

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

**1.** $f(x) = \dfrac{x\cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$ **2.** $g(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$

**3.** $h(x) = \dfrac{x+1}{1+\exp(1/x)}$ **4.** $u(x) = x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

## Exercice 6

**(3660)**

Comparaison de fonctions

On pose $f(x) = 1/(1+x)$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-2\sin x}$, $k(x) = \cos(\sqrt{2x})$. Préciser les positions relatives au voisinage de 0 des courbes représentatives $C_f$, $C_g$, $C_h$, $C_k$.

## Exercice 7

**(3664)**

Sinus hyperbolique

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x \sinh\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\tanh(x) < x$.

En déduire le tableau de variations de $f$. On précisera les limites aux bornes.

Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $u \mapsto \dfrac{\sinh u}{u}$.

En déduire que $f$ admet au voisinage de $+\infty$ un développement asymptotique de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

où $a_0, a_1, a_2$ sont des réels que l'on précisera.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \dfrac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.

Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

Montrer que la suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Déterminer un équivalent de $(u_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## Exercice 8

**(3665)**

Un développement asymptotique

On considère, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + \ln(x) = n$.

Démontrer que cette équation admet une unique solution $x_n \in ]0, +\infty[$, puis démontrer que la suite $(x_n)$ est strictement croissante.

Démontrer que $(x_n)$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $x_n \sim_{n\to+\infty} n$.

Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)$. On pourra poser $a_n$ tel que $\dfrac{x_n}{n} = 1 + a_n$.

Démontrer que $x_n = n - \ln(n) + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$.

En admettant éventuellement le résultat de la question précédente, dire parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

**a**. $x_n \sim_{n\to+\infty} n - \ln(n)$ **b**. $x_n \sim_{n\to+\infty} n - 2\ln(n)$

**c**. $x_n = n - \ln(n) + o(\sqrt{\ln n})$ **d**. $x_n = n - \ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n}$.