TD espaces vectoriels 2

Exercice 1
(757)
Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 2
(766)
Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Comparer :

1. $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.
2. $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 3
(768)
Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer

$$F \cap G = F + G \iff F = G$$

Exercice 4
(771)
Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que

$$F \subset G \implies F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

Exercice 5
(775)
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = (1, -1, 1)$ et $y = (0, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $u = (1, 1, 2)$ appartienne à Vect (x, y). Comparer alors Vect (x, y), Vect (x, u) et Vect (y, u).

Exercice 6
(777)
Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7
(778)
Soient $F = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 8

(781)
Soit $F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 9
(784)
Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x - a|$.
Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercice 10
(799)
Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \ et \ F' \subset G$$

Montrer

$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E$$

Exercice 11
(803)

1. Montrer que la famille $(X + k)^n$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Redémontrer la formule donnant l'expression du déterminant de Vandermonde

Exercice 12
(804)
Soient $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X - 1$ et $P_3 = X^2 + X$.
Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 13
(805)
Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = (X + 1)^{k+1} - X^{k+1}$.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 14
(806)
Pour $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, on pose $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 15
(807)
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

1. Montrer que la famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \forall k \in \mathbb{N}, P_k(x) \in \mathbb{Z}$$

3. Trouver tous les polynômes P tels que

$$\forall x \in \mathbb{Z}, P(x) \in \mathbb{Z}$$

Exercice 16
(808)
Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère F la partie de E constituée des applications de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$$

1. Montrer que F un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim F$.

Exercice 17
(809)
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme non nul.
Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] AP\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer la dimension et un supplémentaire.

Exercice 18
(810)
Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.