

## Corrigé TD espaces vectoriels

### Exercice 1 (3455)

Soit une relation de liaison

$$ae_1 + b(2e_2) + ce_3 = 0 \implies ae_1 + (2b)e_2 + ce_3 + 0e_4 = 0.$$

Alors puisque la famille  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est libre, on en déduit que  $a = 2b = c = 0$ , soit  $a = b = c = 0$ . La famille est donc libre.

C'est encore plus facile. Une famille extraite d'une famille libre est une famille libre !

Soit une relation de liaison

$$ae_1 + b(2e_1 + e_4) + c(e_3 + e_4) = 0 \implies (a + 2b)e_1 + ce_3 + (b + c)e_4 = 0.$$

Puisque la famille  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  est libre, ceci entraîne que

$$\begin{cases} a + 2b = 0 \\ c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}$$

d'où on tire assez facilement que  $a = b = c = 0$ . La famille  $(e_1, 2e_1 + e_4, e_3 + e_4)$  est donc libre.

On peut remarquer que

$$7e_1 - 4e_2 = 2(2e_1 + e_2) + 3(e_1 - 2e_2)$$

et donc la famille n'est pas libre. On pouvait aussi prendre la même méthode que pour la question précédente, et obtenir cette fois que le système admet une solution non-triviale.

### Exercice 2 (3458)

Soient  $X = (x, y, z)$  et  $X' = (x', y', z')$  éléments de  $E_1$ . Alors,  $X + X' = (x + x', y + y', z + z')$  est aussi élément de  $E_1$ . En effet,

$$(x + x') + (y + y') + 3(z + z') = (x + y + 3z) + (x' + y' + 3z') = 0.$$

De même, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a  $\lambda X = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$  est élément de  $E_1$  puisque

$$\lambda x + \lambda y + 3\lambda z = \lambda(x + y + 3z) = 0.$$

$E_1$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

$E_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  car  $\vec{0} = (0, 0, 0)$  n'est pas élément de  $E_2$ .

Soient  $X = (x, y, z, t)$  et  $X' = (x', y', z', t')$  deux éléments de  $E_3$ . Alors  $X + X' = (x + x', y + y', z + z', t + t')$  est aussi élément de  $E_3$ . En effet,

$$x + x' = y + y' = 2z + 2z' = 2(z + z') = 4t + 4t' = 4(t + t').$$

De même, on prouve que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda X$  est élément de  $E_3$ .  $E_3$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$ .

$E_4$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  car il n'est pas stable par addition. En effet,  $X = (1, 0)$  et  $Y = (0, 1)$  sont tout les deux éléments de  $E_4$ , mais  $X + Y = (1, 1)$  n'est pas élément de  $E_4$ .

Les éléments  $(1, 1)$  et  $(-1, 1)$  sont éléments de  $E_5$ . Si on effectue leur somme, on trouve  $(0, 2)$  qui n'est pas élément de  $E_5$  :  $E_5$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . Plus généralement, un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  est une droite passant par  $(0, 0)$ , ou  $\mathbb{R}^2$  lui-même, ou encore le singleton  $\{(0, 0)\}$ .  $E_5$  est une parabole et n'est donc pas un sous-espace vectoriel.

Posons  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + 3y - 5z = 0\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$ . Comme à la première question, on montre que  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ . Leur intersection  $F \cap G$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

Cette fois, aucun théorème du cours ne dit qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels reste un sous-espace vectoriel. Ici, prenons  $(5, 0, 2) \in F \subset F \cup G$  et  $(1, 1, 0) \in G \subset F \cup G$ . Alors  $(5, 0, 2) + (1, 1, 0) = (6, 1, 2) \notin G$  car  $6 - 1 + 2 = 5 \neq 0$ . Ainsi,  $F \cup G$  n'est pas stable par addition et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Plus généralement, on prouve qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

### Exercice 3 (3459)

On va prouver que  $E_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ . Pour cela, prenons  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $E_1$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $(P + Q)(0) = P(0) + Q(0) = P(2) + Q(2) = (P + Q)(2)$  et donc  $P + Q \in E_1$ . De même,  $(\lambda P)(0) = \lambda \times P(0) = \lambda \times P(2) = (\lambda P)(2)$  et donc  $\lambda P \in E_1$ . Ceci prouve le résultat annoncé.

$E_2$  n'est pas un espace vectoriel car le polynôme nul n'est pas élément de  $E_2$ . Donc  $E_2$  n'est pas un sous-espace vectoriel.

Remarquons que  $E_3 = \{AQ; Q \in \mathbb{R}[X]\}$ . Soient  $P_1 = AQ_1$  et  $P_2 = AQ_2$  deux éléments de  $E_3$ , et soit également  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $P_1 + P_2 = A(Q_1 + Q_2) \in E_3$  et  $\lambda P_1 = A(\lambda Q_1) \in E_3$ , ce qui prouve que  $E_3$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ .

On sait que la somme de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable, et que le produit d'une fonction dérivable par un scalaire est une fonction dérivable. Par conséquent,  $\mathcal{D}$  est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Remarquons d'abord que  $E_4$  est une partie de  $\mathcal{D}$ . Soient  $y_1, y_2$  deux solutions et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Posons  $y = y_1 + \lambda y_2$ . Alors

$$y' + a(x)y = (y_1' + a(x)y_1) + (y_2' + a(x)y_2) = 0$$

ce qui prouve que  $y \in E_4$ . Ainsi,  $E_4$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}$ .

$E_5$  n'est pas un espace vectoriel car 0 n'est pas solution de l'équation différentielle.

### Exercice 4 (3460)

Bien sûr, si  $F \subset G$ ,  $F \cup G = G$  est un sous-espace vectoriel ce qui prouve une implication. Réciproquement, supposons que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et que pourtant  $F$  n'est pas inclus dans  $G$  et  $G$  n'est pas inclus dans  $F$ . Prenons  $x$  dans  $F \setminus G$  et  $y$  dans  $G \setminus F$ . Alors, puisque  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel, il est stable par addition et donc  $x + y \in F \cup G$ . Mais, si  $x + y$  est dans  $F$ , alors  $y = (x + y) - x \in F$  (car  $F$  est un sev) ce qui n'est pas le cas. De même, si  $x + y$  est dans  $G$ , alors  $x = (x + y) - y \in G$  ce qui est impossible. On obtient donc une contradiction et l'autre implication.

### Exercice 5 (3461)

On se demande s'il existe  $x, y \in \mathbb{R}$  tel que  $u = xu_1 + yu_2$ .

On doit résoudre le système

$$\begin{cases} 1 &= x + 2y \\ 2 &= -2x + 3y \end{cases}$$

Effectuant  $L_2 + 2L_1 \rightarrow L_2$ , on trouve qu'il est équivalent à

$$\begin{cases} 1 & = & x + 2y \\ 4 & = & 7y \end{cases}$$

On peut donc trouver  $y$ , puis  $x$  :  $u$  est bien combinaison linéaire de  $u_1$  et  $u_2$ . Une façon plus abstraite de voir les choses est de remarquer que  $u_2$  n'est pas proportionnel à  $u_1$ . Ainsi,  $(u_1, u_2)$  est une famille libre à deux éléments dans  $\mathbb{R}^2$ , espace de dimension 2. C'est donc une base de  $E$ . En particulier, tout vecteur de  $\mathbb{R}^2$  s'écrit comme combinaison linéaire de  $u_1$  et  $u_2$ .

D'après la question précédente,  $u$  est combinaison linéaire de  $u_1$  et  $u_2$ . Il est a fortiori combinaison linéaire de  $u_1, u_2$  et  $u_3$ .

On ne peut plus avoir de raisonnement abstrait car on travaille avec seulement deux vecteurs dans un espace de dimension 3. L'équation  $u = xu_1 + yu_2$  équivaut successivement à

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 2 \\ 4x = 7 \\ -2x = -5 \end{cases} \begin{array}{l} (L_2 + L_1 \rightarrow L_2) \\ (L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3) \end{array}$$

Les deux dernières équations sont incompatibles,  $u$  n'est donc pas combinaison linéaire de  $u_1$  et  $u_2$ .

On reprend le même raisonnement. L'équation  $u = xu_1 + yu_2$  équivaut successivement à

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = m \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = 3 \\ 4x = 4 \\ -2x = m - 12 \end{cases} \begin{array}{l} (L_2 + L_1 \rightarrow L_2) \\ (L_3 - 4L_1 \rightarrow L_3) \end{array}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ -2 = m - 12 \end{cases}$$

Le système admet donc une solution si et seulement si  $m = 10$ . Par conséquent,  $u$  est combinaison linéaire de  $u_1$  et  $u_2$  si et seulement si  $m = 10$ .

## Exercice 6

(3463)

Puisque  $u$  et  $v$  sont non-nuls et que  $u$  n'est pas proportionnel à  $v$ , la famille de deux vecteurs  $(u, v)$  est libre.

Écrivons  $au + bv + cw = 0$ . Si on traduit cette égalité coordonnée par coordonnée, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 0 \\ -a + b + c = 0 \end{cases}$$

On en déduit, par la deuxième ligne,  $a = 0$ , puis  $b = 0$  et  $c = 0$ . La famille  $(u, v, w)$  est une famille libre.

Ecrivons  $au + bv + cw = 0$ . Ceci se traduit en le système

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ -a + b - 3c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 0 \\ -2b + 4c = 0 \\ 2b - 4c = 0 \end{cases} \begin{array}{l} L_2 - 2L_1 \rightarrow L_2 \\ L_3 + L_1 \rightarrow L_3 \end{array}$$

Pour  $c = 1, b = 2$  et  $a = -1$ , on obtient une solution non-nulle du système. Autrement dit,  $-u + 2v + w = 0$  et donc la famille  $(u, v, w)$  est liée.

On peut reprendre la même méthode que précédemment, en écrivant  $au + bv + cw + dz = 0$ , et montrer qu'il existe une solution non nulle. On peut aussi remarquer (quand on connaît la théorie de la dimension) qu'on a une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 3,  $\mathbb{R}^3$ . Elle ne peut pas être libre :  $(u, v, w, z)$  est une famille liée.

### Exercice 7 (3464)

Les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas nuls et ne sont pas colinéaires. Ainsi, la famille de deux vecteurs  $(v_1, v_2)$  est libre. Il en est de même pour la famille  $(v_1, v_3)$ , ainsi que pour la famille  $(v_2, v_3)$ , par une preuve identique.

On remarque que  $v_3 = v_2 - 2v_1$  : il y a une combinaison linéaire des trois vecteurs avec des coefficients non tous nuls qui donne le vecteur nul. La famille n'est pas libre. Si on n'a pas la "chance" de remarquer que  $v_3 = v_2 - 2v_1$ , on peut écrire une relation de liaison  $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ , on obtient un système de trois équations dont les inconnues sont  $a, b$  et  $c$ . La résolution de ce système montre qu'il admet une solution non-nulle.

### Exercice 8 (3465)

On a  $v_2 = 2v_1$ . La famille  $(v_1, v_2)$  est donc liée. Quel que soit le vecteur  $w$ , la famille  $(v_1, v_2, w)$  restera liée, puisqu'on aura toujours  $2v_1 - v_2 + 0w = 0$ , combinaison linéaire dont qui n'a pas tous ses coefficients nuls.

A contrario, la famille  $(v_1, v_3)$  est libre. Pour  $w = (1, 0, 0)$ , il est facile de voir que la famille  $(v_1, v_3, w)$  est libre. En effet, si  $av_1 + bv_3 + cw = 0$ , on a

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a - b = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a - b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases}$$

d'où on tire  $a = b = c = 0$  et la famille est libre.   
 Quand on connaît la théorie de la dimension, on sait que l'on peut compléter la famille libre  $(v_1, v_3)$  grâce au théorème de la base incomplète, qui nous dit qu'on peut compléter la famille libre à deux vecteurs  $(v_1, v_3)$  pour en faire une base (à trois vecteurs) de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, on peut choisir le vecteur qui complète dans n'importe quel système générateur de  $\mathbb{R}^3$ . Le plus naturel est bien entendu la base canonique.

### Exercice 9 (3467)

Si on a une relation de liaison de la forme  $a \cos x + b \sin x = 0$ , alors on l'évalue en  $x = 0$  et on trouve  $a = 0$ . Puis en évaluant en  $x = \pi/2$ , on trouve  $b = 0$ . La famille est libre.

Si on a une relation de liaison de la forme  $a \cos x + b \sin x + c \sin(2x) = 0$ , alors on l'évalue en  $x = 0$  pour trouver  $a = 0$ , puis en  $x = \pi/2$  pour trouver  $b = 0$ . On en déduit que  $c = 0$ . La famille est donc libre. Il faut prendre garde ici à ce que la formule de trigonométrie

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

n'entraîne pas que  $\sin(2x)$  est une combinaison linéaire de  $\sin(x)$  et  $\cos(x)$ .

On a

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

qui prouve que  $\cos(2x)$  est une combinaison linéaire de  $\cos^2 x$  et de  $\sin^2 x$ . La famille est donc liée.

Si on a une relation de liaison du type

$$ax + be^x + c \sin(x) = 0,$$

alors on met  $e^x$  en facteur et on trouve :

$$axe^{-x} + b + c \sin(x)e^{-x} = 0.$$

On fait tendre  $x$  vers  $+\infty$  et le membre de gauche tend vers  $b$  qui doit donc être nul. On a alors

$$ax + c \sin x = 0.$$

Si  $a \neq 0$ , le membre de gauche tend vers  $\pm\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . C'est donc que  $a = 0$ . On en déduit  $c = 0$  et la famille est libre.

### Exercice 10

(3470)

On note  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $u_1$ . Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in F &\iff \exists a \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = a \\ y = 2a \\ z = 3a \end{cases} \iff \exists a \in \mathbb{R} \begin{cases} a = x \\ y - 2x = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y - 2x = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien trouvé un système d'équations de  $F$ .

On note  $G$  le sous-espace vectoriel engendré par  $u_1$  et  $u_2$ . Alors,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in G &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} x = a - b \\ y = 2a \\ z = 3a + b \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a = y/2 \\ b = z - 3y/2 \\ 0 = x - 2y + z \end{cases} \\ &\iff x - 2y + z = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation est une équation de  $G$ .

On note  $H$  le sous-espace engendré par  $u_1, u_2$  et  $u_3$ . Alors,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in H &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = a + 2b + c \\ y = 2a + b \\ z = c \end{cases} \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} a + 2b + c = x \\ -3b - 2c = y - 2x \\ c = z \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient un système triangulaire dont aucun des pivots n'est nul. Autrement dit, le système admet toujours une solution, quelles que soient les valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Ainsi,  $H = \mathbb{R}^3$ .

### Exercice 11

(3471)

On a

$$(x, y, z) \in F \iff x = -2y + z \iff \begin{cases} x = y \times -2 + z \times 1 \\ y = y \times 1 + z \times 0 \\ z = y \times 0 + z \times 1. \end{cases}$$

Posant  $u_1 = (-2, 1, 0)$  et  $u_2 = (1, 0, 1)$ , on a donc  $F = \text{vect}(u_1, u_2)$ . Cette solution n'est (bien sûr!) pas unique.

On a

$$(x, y, z) \in G \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \\ z = z \end{cases}$$

On a donc  $G = \text{vect}(u)$ , avec  $u = (2, 3, 1)$ .

### Exercice 12

(3473)

Ils ne sont pas supplémentaires, la raison profonde étant qu'il n'y a pas assez de vecteurs. Ici, on va trouver un vecteur qui n'est pas dans la somme de  $\text{vect}(v_1, v_2)$  et  $\text{vect}(v_3)$ , c'est-à-dire un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire de  $v_1, v_2, v_3$ . Par exemple,  $v_4$  n'est pas combinaison linéaire de  $v_1, v_2, v_3$ . En effet, s'il l'était, alors on aurait

$$v_4 = av_1 + bv_2 + cv_3$$

soit, en regardant coordonnées par coordonnées, le système

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

qui n'admet pas de solutions. <br> Bien sûr, avec la théorie de la dimension, il serait plus facile de remarquer qu'un système de 3 vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  ne peut pas être une base de  $\mathbb{R}^4$ .

Nous allons prouver que  $\text{vect}(v_1, v_2)$  et  $\text{vect}(v_4, v_5)$  sont en somme directe. Il y a deux choses à prouver : <ul class="rien">

$\text{vect}(v_1, v_2) \cap \text{vect}(v_4, v_5) = \{0\}$ . Soit  $u$  dans l'intersection. Alors d'une part  $u = av_1 + bv_2$  et d'autre part  $u = cv_4 + dv_5$ . En écrivant les vecteurs, on obtient

$$(a, 0, b, a) = (0, d, 0, c + d)$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ b = 0 \\ a = c + d \end{cases}$$

duquel on conclut sans peine que  $a = b = c = d = 0$ .

$\text{vect}(v_1, v_2) + \text{vect}(v_4, v_5) = \mathbb{R}^4$ . Mais,

$$\text{vect}(v_1, v_2) + \text{vect}(v_4, v_5) = \text{vect}(v_1, v_2, v_4, v_5).$$

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ . Alors on remarque très facilement que

$$(x, y, z, t) = xv_1 + zv_2 + (t - x - y)v_4 + yv_5$$

ce qui prouve bien que  $(x, y, z, t) \in \text{vect}(v_1, v_2) + \text{vect}(v_4, v_5)$ .

Non, car il y a trop de vecteurs ! On remarque assez facilement que  $v_5 = v_3 + v_4$  est dans l'intersection des deux sous-espaces vectoriels. On pourrait également conclure à l'aide de la théorie de la dimension.

Cette fois, la théorie de la dimension ne pourrait pas s'appliquer. Cependant, on remarque que  $v_4 = v_5 - v_3$  est dans l'intersection des deux sous-espaces vectoriels.

### Exercice 13

(3474)

On va simplement démontrer que  $F \cap G = \{0\}$ , les deux autres égalités se prouvant de façon tout à fait similaire. Soit  $u \in F \cap G$ . Alors il existe des scalaires  $a, b, c, d$  tels que

$$u = a(u_1 + u_2) + bu_3 = c(u_1 + u_3) + du_4 \implies (a - c)u_1 + au_2 + (b - c)u_3 - du_4 = 0.$$

La famille  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  étant libre, on en déduit que

$$a - c = a = b - c = -d = 0,$$

d'où l'on déduit successivement  $a = d = 0$ , puis  $c = 0, b = 0$ . Ainsi,  $u = 0$ . On va prouver que la somme  $F + G + H$  n'est pas directe en trouvant un vecteur qui admet deux décompositions différentes dans  $F + G + H$ . Par exemple,

$$\begin{aligned} u_1 &= -u_3 + (u_1 + u_3) + 0 \in F + G + H \\ &= (u_1 + u_2) + 0 + (-u_2) \in F + G + H. \end{aligned}$$

La somme n'est pas directe !

### Exercice 14

(3476)

D'abord, il est clair que  $F \cap G = \{0\}$ . En effet, si la suite  $(u_n)$  est dans l'intersection de  $F$  et  $G$ , alors tous ses termes d'indice pair sont nuls, et par suite tous ceux d'indice impair sont également nuls car  $F = G$ . Prouvons maintenant que  $F + G = E$ . Pour cela, prenons une suite  $(u_n)$  de  $E$  et réfléchissons un peu. Si  $u_n = v_n + w_n$  avec  $(v_n) \in F$  et  $(w_n) \in G$ , alors on a forcément  $u_{2n} = w_{2n}$  ce qui définit forcément  $(w_n)$  puisque  $w_{2n+1} = w_{2n}$ . La suite  $(v_n)$  ne peut être que la différence entre  $u_n$  et  $w_n$ , en espérant qu'elle soit dans  $F$ . Agissons maintenant ! On pose  $(w_n)$  par  $w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n}$  pour tout entier naturel  $n$ . Il est clair que  $(w_n)$  est élément de  $G$ . Posons ensuite, pour tout entier naturel  $n, v_n = u_n - w_n$ . Alors par définition on a  $(u_n) = (v_n) + (w_n)$  et il reste à prouver que  $(v_n) \in F$ . Mais c'est facile, car  $v_{2n} = u_{2n} - w_{2n} = 0$ . Ainsi, on a bien prouvé par ce raisonnement dit d'analyse-synthèse que  $E = F \oplus G$ .

### Exercice 15

(3480)

Remarquons d'abord que  $F \cap G = \{0\}$ . En effet, si  $f$  est élément de  $F \cap G$ , alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a à la fois  $f(-x) = f(x)$  et  $f(-x) = -f(x)$ , d'où  $f(x) = -f(x)$  ce qui entraîne  $f(x) = 0$ . D'autre part, tout élément  $h$  de  $E$  se décompose sous la forme  $h = f + g$ , avec  $f$  dans  $F$  et  $g$  dans  $G$ . Pour cela, on utilise un

raisonnement par analyse-synthèse. <br> Admettons un bref instant que  $h = f + g$  avec  $f \in F$  et  $g \in G$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $h(x) = f(x) + g(x)$  et  $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$ . Des deux équations précédentes, on tire facilement que  $f(x) = (h(x) + h(-x))/2$  et  $g(x) = (h(x) - h(-x))/2$ . <br> On peut désormais passer à la synthèse (le paragraphe précédent peut être considéré comme une recherche "au brouillon"). On pose  $f(x) = (h(x) + h(-x))/2$  et  $g(x) = (h(x) - h(-x))/2$ . Alors on vérifie facilement que : <ul class="rien" >

$$h = f + g;$$

$$f \text{ est paire : en effet } f(-x) = (h(-x) + h(-(-x))) = (h(-x) + h(x)) = f(x);$$

$g$  est impaire (même raisonnement). </ul> Ainsi, on a bien  $F + G = E$ . <br> Remarquons que la partie 'analyse' du raisonnement montre aussi l'unicité de la décomposition, et redémontre donc que la somme est directe.