TD espaces vectoriels

Exercice 1

(3455)

A partir d'une famille libre

Dans $\mathbb{R}^n$, on considère une famille de 4 vecteurs libres (e_1, e_2, e_3, e_4). Les familles suivantes sont-elles libres ?

$(e_1, 2e_2, e_3)$;
(e_1, e_3) ;
$(e_1, 2e_1 + e_4, e_3 + e_4)$;
$(2e_1 + e_2, e_1 - 2e_2, e_4, 7e_1 - 4e_2)$.

Exercice 2

(3458)

Est-ce un sous-espace vectoriel ?

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont, ou ne sont pas, des sous-espaces vectoriels ?

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 0\}$;
$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x + y + 3z = 2\}$;
$E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4;\ x = y = 2z = 4t\}$;
$E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$;
$E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x^2\}$;
$E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$;
$E_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x + 3y - 5z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$.

Exercice 3

(3459)

Est-ce un sous-espace vectoriel (bis) ?

Déterminer si les ensembles suivants sont ou ne sont pas des sous-espaces vectoriels :

$E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = P(2)\}$;
$E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P'(0) = 2\}$;
Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non-nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X]; A|P\}$;
$\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont dérivables ;
E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où $a \in \mathcal{D}$.
E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où $a \in \mathcal{D}$.

Exercice 4

(3460)

Réunion de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est encore un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5

(3461)

Combinaisons linéaires ?

Les vecteurs u suivants sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_i ?

$E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$;
$E = \mathbb{R}^2$, $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$, $u_3 = (-4, 5)$;
$E = \mathbb{R}^3$, $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$;

$E = \mathbb{R}^3$, $u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 6
(3463)
Pour bien commencer...
Les familles suivantes sont-elles libres dans $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^4$ pour la dernière famille) ?
(u, v) avec $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-1, 4, 6)$;
(u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 0, 1)$;
(u, v, w) avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$;
(u, v, w, z) avec $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (5, 6, 7, 8)$, $w = (9, 10, 11, 12)$ et $z = (13, 14, 15, 16)$.

Exercice 7
(3464)
Deux par deux, et par trois ?
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.
Montrer que la famille (v_1, v_2) est libre. Faire de même pour (v_1, v_3), puis pour (v_2, v_3).
La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?

Exercice 8
(3465)
Complétion de familles libres
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (2, -2, 2),\ v_3 = (2, -1, 2).$$

Peut-on trouver un vecteur w tel que (v_1, v_2, w) soit libre ? Si oui, construisez-en un.
Même question en remplaçant v_2 par v_3.

Exercice 9
(3467)
Avec des fonctions
Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :
$(\sin x, \cos x)$;
$(\sin 2x, \sin x, \cos x)$;
$(\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x)$;
$(x, e^x, \sin(x))$.

Exercice 10
(3470)
D'un système générateurs à un système d'équations...
Donner un système d'équations des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :
$u_1 = (1, 2, 3)$;
$u_1 = (1, 2, 3)$ et $u_2 = (-1, 0, 1)$;
$u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (2, 1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 1)$.

Exercice 11
(3471)
D'un système d'équations à un système générateurs...

Trouver un système générateur des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:
$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - z = 0\}$;
$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$.

Exercice 12
(3473)
Où sont les supplémentaires ?

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants : $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (0,0,1,0)$, $v_3 = (0,1,0,0)$, $v_4 = (0,0,0,1)$ et $v_5 = (0,1,0,1)$. Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.
vect(v_1, v_2) et vect(v_3) ?
vect(v_1, v_2) et vect(v_4, v_5) ?
vect(v_1, v_3, v_4) et vect(v_2, v_5) ?
vect(v_1, v_4) et vect(v_3, v_5) ?

Exercice 13
(3474)
Par deux, mais par trois ?

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre de E et on pose

$$F = \text{vect}(u_1 + u_2, u_3),\ G = \text{vect}(u_1 + u_3, u_4), H = \text{vect}(u_1 + u_4, u_2).$$

Démontrer que $F \cap G = \{0\}$, que $F \cap H = \{0\}$ et que $G \cap H = \{0\}$. La somme $F + G + H$ est-elle directe ?

Exercice 14
(3476)
Avec des suites

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$$

$$G = \{(u_n) \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 15
(3480)
Fonctions paires / Fonctions impaires

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note F le sous-espace vectoriel des fonctions paires (ie $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et G le sous-espace vectoriel des fonctions impaires (ie $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que F et G sont supplémentaires.