Corrigé
TD espaces vectoriels 2

Exercice 1
(757)

(a) $F \subset \mathbb{R}^3$,
$\vec{o} = (0,0,0) \in F$ car $0 + 0 - 0 = 0$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$\vec{u}, \vec{v} \in F$, on peut écrire

$$\vec{u} = (x, y, z)$$

et

$$\vec{v} = (x', y', z')$$

avec $x + y - z = 0$ et $x' + y' - z' = 0$. On a alors

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$$

avec

$$(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(x + y - z) + \mu(x' + y' - z') = 0$$

donc

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F.$$

$G \subset \mathbb{R}^3$,
$\vec{o} = (0,0,0) \in G$ car

$$(0,0,0) = (a - b, a + b, a - 3b)$$

pour $a = b = 0$. Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$\vec{u}, \vec{v} \in G$, on peut écrire

$$\vec{u} = (a - b, a + b, a - 3b)$$

et

$$\vec{v} = (a' - b', a' + b', a' - 3b')$$

avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \ldots = (a'' - b'', a'' + b'', a'' - 3b'')$$

avec $a'' = \lambda a + \mu a'$ et $b'' = \lambda b + \mu b'$ donc

$$\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in G.$$

Finalement F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. (b)

$$\vec{u} = (x, y, z) \in F \cap G$$

si, et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x & = a - b \\ y & = a + b \\ z & = a - 3b \\ x + y - z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = a - b \\ y & = a + b \\ z & = a - 3b \\ a + 3b & = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$F \cap G = \{(-4b, -2b, -6b) \,|b \in \mathbb{R}\} = \{(2c, c, 3c) \,|c \in \mathbb{R}\} .$$

Exercice 2
(766)
(a) Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F \cap G$ et $v \in F \cap H$. Comme $u, v \in F$ on a $x \in F$ et comme $u \in G$ et $v \in H$ on a $u + v \in G + H$. Par suite

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

L'égalité n'est pas possible, prendre F, G, H trois droites distinctes d'un même plan. (b) Soit $x \in F + (G \cap H)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G \cap H$. Comme $u \in F$ et $v \in G$ on a $x \in F + G$ et de même $x \in F + H$ donc $x \in (F + G) \cap (F + H)$. L'égalité n'est pas possible, prendre à nouveau trois droites distinctes d'un même plan.

Exercice 3
(768)

($\langle 10232 \rangle$) ok ($\langle 10233 \rangle$) Supposons $F \cap G = F + G$.
$F \subset F + G = F \cap G \subset G$ et de même $G \subset F$ et $F = G$.

Exercice 4
(771)

$F + (G \cap H) \subset F + G$ et $F + (G \cap H) \subset F + H$ donc

$$F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H).$$

Supposons de plus $F \subset G$. Soit

$$\vec{x} \in (F + G) \cap (F + H).$$

On a $\vec{x} \in F + G = G$ et

$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$$

avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in H$.

$$\vec{v} = \vec{x} - \vec{u} \in G$$

donc $\vec{v} \in G \cap H$ puis $x \in F + (G \cap H)$.

Exercice 5
(775)
On a

$$u = \lambda x + \mu y \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = 1 \\ -\lambda + \mu & = 1 \\ \lambda + a\mu & = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = 1 \\ \mu & = 2 \\ a & = 1/2 \end{cases}$$

Ainsi

$$u \in \mathrm{Vect}\,(x, y) \Leftrightarrow a = 1/2$$

et alors $u = x + 2y$. $x, u \in \mathrm{Vect}\,(x, y)$ donc

$$\mathrm{Vect}\,(x, u) \subset \mathrm{Vect}\,(x, y).$$

$x, y \in \text{Vect}(y, u)$ donc

$$\text{Vect}(x, y) \subset \text{Vect}(y, u).$$

$y, u \in \text{Vect}(x, u)$ donc

$$\text{Vect}(y, u) \subset \text{Vect}(x, u).$$

Finalement les trois espaces sont égaux.

Exercice 6
(777)

$$F \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

et $o \in F$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$,

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$$

et

$$(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.

$$G \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

et $o \in G$ (en prenant $a = b = 0$). Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in G$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ et } g(x) = cx + d$$

et on a alors

$$(\lambda f + \mu g)(x) = ex + f$$

avec

$$e = \lambda a + \mu c \in \mathbb{R} \text{ et } f = \lambda b + \mu d \in \mathbb{R}$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$. Soit $h \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = ax + b$ car $h \in G$. Or $h \in F$ donc $h(0) = b = 0$ et $h'(0) = a = 0$ puis $h(x) = 0$ i.e. $h = o$. Ainsi
$F \cap G = \{0\}$ Soit

$$h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Posons $a = h'(0) \in \mathbb{R}$,
$b = h(0)$,
$g : x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$. Clairement $g \in G$ et $h = f + g$. De plus $f(0) = h(0) - b = 0$ et

$$f'(0) = h'(0) - a = 0$$

donc $f \in F$. Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Finalement, F et G sont supplémentaires dans

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Exercice 7
(778)

$$F\subset\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{C})$$

et $0\in F$ car $\int_{-1}^{1}0\mathrm{d}t=0$. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ et $f,g\in F$, on a

$$\int_{-1}^{1}(\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_{-1}^{1}g(t)\,\mathrm{d}t=0$$

donc $\lambda f+\mu g\in F$.

$$G\subset\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$$

et $0\in G$ car c'est une fonction constante. Soient $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ et $f,g\in G$. On a $\lambda f+\mu g\in G$ car il est clair que c'est une fonction constante. Soit $h\in F\cap G$. On a h constante car $h\in G$. Posons C la valeur de cette constante. Puisque $h\in F$, on a

$$\int_{-1}^{1}h(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}C\mathrm{d}t=2C=0$$

et donc $h=0$. Ainsi

$F\cap G=\{0\}$ Soit

$$h\in\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{C}).$$

Posons

$$C=\int_{-1}^{1}h(t)\,\mathrm{d}t,$$

g la fonction constante égale à $\frac{1}{2}C$ et $f=h-g$. Clairement $g\in G$ et $f+g=h$. De plus

$$\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}h(t)\,\mathrm{d}t-C=0$$

donc $f\in F$. Ainsi

$$F+G=\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{C})$$

Finalement F et G sont supplémentaires dans

$$\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{C}).$$

Exercice 8
(781)
(a) sans peine (b) L'ensemble des fonctions constantes convient.

Exercice 9
(784)
Soient $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Supposons

$$\lambda_1 f_{a_1}+\ldots+\lambda_n f_{a_n}=0.$$

Pour tout $i \in \{1\langle 8739\rangle\ldots,n\}$, si $\lambda_i \neq 0$ alors

$$\lambda_1 f_{a_1} + \ldots + \lambda_n f_{a_n}$$

n'est pas dérivable en a_i alors que la fonction nulle l'est. Nécessairement $\lambda_i = 0$ et la famille étudiée est donc libre.

Exercice 10

(799)

Supposons $x + x^{'} + y = 0$ avec $x \in F$,

$x^{'} \in F^{'}$ et $y \in G \cap G^{'}$. Puisque $x^{'} \in F^{'} \subset G$ et $y \in G \cap G^{'} \subset G$, on a $x^{'} + y \in G$. Or F et G sont en somme directe donc $x + (x^{'} + y) = 0$ avec $x \in F$ et $x^{'} + y \in G$ entraîne $x = 0$ et $x^{'} + y = 0$. Sachant $x^{'} + y = 0$ avec $x \in F^{'}$,

$y \in G^{'}$ et $F^{'}, G^{'}$ en somme directe, on a $x^{'} = y = 0$. Finalement $x = x^{'} = y = 0$ et on peut affirmer que les espaces $F, F^{'}$ et $G \cap G^{'}$ sont en somme directe. Soit $a \in E$. Puisque $E = F \oplus G$, on peut écrire $a = x + b$ avec $x \in F$ et $b \in G$. Sachant $E = F^{'} \oplus G^{'}$, on peut écrire $b = x^{'} + y$ avec $x^{'} \in F^{'}$ et $y \in G^{'}$. Or $y = b - x^{'}$ avec $b \in G$ et $x^{'} \in F^{'} \subset G$ donc $y \in G$ et ainsi $y \in G \cap G^{'}$. Finalement, on obtient $a = x + x^{'} + y$ avec $x \in F$,

$x^{'} \in F^{'}$ et $y \in G \cap G^{'}$. On peut conclure $E \subset F \oplus F^{'} \oplus (G \cap G^{'})$ puis $E = F \oplus F^{'} \oplus (G \cap G^{'})$.

Exercice 11

(803)

(a) La matrice de la famille étudiée dans la base canonique de

$$\mathbb{R}_n[X]$$

a pour coefficient général

$$a_{i,j} = \binom{n}{i} j^i \text{ avec } 0 \leq i, j \leq n$$

En factorisant par ligne le déterminant de cette matrice est

$$\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_{n+1}(0, 1, \ldots, n) \neq 0$$

avec $V_{n+1}(a_0, \ldots, a_n)$ déterminant de Vandermonde. (b) cf. cours.

Exercice 12

(804)

Supposons

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0.$$

Par égalité de coefficients de polynômes :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$

Après résolution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. La famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre formée de

$$3 = \dim \mathbb{K}_2[X]$$

polynômes de

$$\mathbb{K}_2[X],$$

c'est donc une base de

$$\mathbb{K}_2[X].$$

Exercice 13
(805)
On remarque que $\deg P_k = k$ donc

$$P_k \in \mathbb{K}_n[X].$$

Supposons $\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$. Si $\lambda_n \neq 0$ alors

$$\deg\left(\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n\right) = n$$

car

$$\deg\left(\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_{n-1} P_{n-1}\right) \leq n-1$$

et $\deg \lambda_n P_n = n$

Ceci est exclu, donc $\lambda_n = 0$. Sachant $\lambda_n = 0$, le même raisonnement donne $\lambda_{n-1} = 0$ et ainsi de suite $\lambda_{n-2} = \ldots = \lambda_0 = 0$. La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre de

$$n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$$

éléments de

$$\mathbb{K}_n[X],$$

c'est donc une base de

$$\mathbb{K}_n[X].$$

Exercice 14
(806)
Supposons $\lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$. En évaluant en 0, on obtient $\lambda_0 = 0$ et alors

$$\lambda_1 X (1-X)^{n-1} + \ldots + \lambda_n X^n = 0.$$

En simplifiant par X (ce qui est possible car $X \neq 0$) on obtient

$$\lambda_1 (1-X)^{n-1} + \ldots + \lambda_n X^{n-1} = 0$$

qui évaluée en 0 donne $\lambda_1 = 0$. On reprend ce processus jusqu'à obtention de $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre de

$$n+1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$$

éléments de

$$\mathbb{K}_n[X]$$

(car $\deg P_k = n$), c'est donc une base de

$$\mathbb{K}_n[X].$$

Exercice 15

(807)
a) C'est une famille de polynômes de degrés étagés. b) Quand $k \leq m$,

$$P_k(m) = \binom{m}{k}$$

Quand $0 \leq m \leq k-1$, $P_k(m) = 0$ Quand $m < 0$,

$$P_k(m) = (-1)^k \binom{-m+k-1}{k}$$

c) Soit P non nul solution. On peut écrire $P = \lambda_0 P_0 + \ldots + \lambda_n P_n$ avec $n = \deg P$. $P(0) \in \mathbb{Z}$ donne $\lambda_0 \in \mathbb{Z}$. $P(1) \in \mathbb{Z}$ sachant $\lambda_0 P_0(1) \in \mathbb{Z}$ donne $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$, etc. Inversement : ok Finalement, les polynômes solutions sont ceux se décomposant en coefficients entiers sur les P_k .

Exercice 16

(808)
(a) $F \subset E$ et la fonction nulle appartient à F (en prenant

$$P = Q = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$$

) Soient $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On peut écrire

$$f(x) = P(x)\sin x + Q(x)\cos x$$

et

$$g(x) = \hat{P}(x)\sin x + \hat{Q}(x)\cos x$$

avec

$$P, Q, \hat{P}, \hat{Q} \in \mathbb{R}_n[X].$$

On a alors

$$\lambda f + \mu g = (\lambda P + \mu\hat{P})(x)\sin x + (\lambda Q + \mu\hat{Q})(x)\cos x$$

avec

$$\lambda P + \mu\hat{P}, \lambda Q + \mu\hat{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$ et finalement F est un sous-espace vectoriel de E. (b) Posons $f_k(x) = x^k \sin x$ et $g_k(x) = x^k \cos x$ avec $k \in \{0, \ldots, n\}$. Les fonctions $f_0, \ldots, f_n, g_0, \ldots, g_n$ sont des fonctions de F formant clairement une famille génératrice. Supposons

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_n f_n + \mu_0 g_0 + \ldots + \mu_n g_n = 0$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$(\lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_n x^n)\sin x + (\mu_0 + \mu_1 x + \ldots + \mu_n x^n)\cos x = 0.$$

Pour $x = \pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient une infinité de racine au polynôme

$$\lambda_0 + \lambda_1 X + \ldots + \lambda_n X^n.$$

Ceci permet d'affirmer $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Pour $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut affirmer $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$. On peut conclure que

$$(f_0, \ldots, f_n, g_0, \ldots, g_n)$$

est libre et donc une base de F puis $\dim F = 2(n+1)$.

Exercice 17
(809)

$$F \subset \mathbb{K}_n[X]$$

, $0 \in F$ car $A\langle 8739\rangle 0$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in F$.

$A\langle 8739\rangle P$ et $A\langle 8739\rangle Q$ donc $A\langle 8739\rangle \lambda P + \mu Q$ puis $\lambda P + \mu Q \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de

$$\mathbb{K}_n[X].$$

Notons $p = \deg A$. On a

$$F \oplus \mathbb{K}_{p-1}[X] = \mathbb{K}_n[X]$$

ce qui détermine un supplémentaire de F et donne $\dim F = n + 1 - p$.

Exercice 18
(810)
Considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$$

définie par

$$\varphi(P) = P(X+1) - P(X).$$

L'application φ est bien définie, linéaire et de noyau

$$\mathbb{R}_0[X].$$

Par le théorème du rang elle est donc surjective et les solutions de l'équation $\varphi(P) = X^n$ se déduisent les unes des autres par l'ajout d'un élément de

$$\mathbb{R}_0[X]$$

c'est-à-dire d'une constante. Ainsi il existe une unique solution vérifiant $P(0) = 0$.