

TD dénombrement 2

Exercice 1

(3736)

Nombres et chiffres

Soit A l'ensemble des nombres à 7 chiffres ne comportant aucun "1". Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants :

A .

A_1 , ensemble des nombres de A ayant 7 chiffres différents.

A_2 , ensemble des nombres pairs de A .

A_3 , ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre où ils sont écrits).

Exercice 2

(3737)

Inclusion

Soit E un ensemble à n éléments ; Combien y-a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \subset Y$?

Exercice 3

(3739)

Groupe d'étudiants

A leur entrée en L_1 , les étudiants choisissent une langue (anglais ou allemand) et une option (informatique, chimie ou astronomie). Dans un groupe d'étudiants, 12 étudiants sont inscrits en astronomie, 15 en chimie, 16 étudient l'allemand. Par ailleurs, 8 inscrits en astronomie et 3 inscrits en informatique étudient l'anglais, 6 inscrits en chimie étudient l'allemand. < br > Indiquer la répartition des étudiants par discipline, ainsi que le nombre total d'étudiants dans le groupe.

Exercice 4

(3740)

Triangles

On trace dans un plan $n \geq 3$ droites en position générale (c'est-à-dire que deux droites ne sont jamais parallèles, et 3 droites ne sont jamais concourantes). Combien de triangles a-t-on ainsi tracé ?

Exercice 5

(3741)

Podium !

Une course oppose 20 concurrents.

Combien y-a-t-il de podiums possibles ?

On souhaite récompenser les 3 premiers en leur offrant un livre (le même pour les 3 premiers). Combien y-a-t-il de distributions de récompenses possibles ?

Exercice 6

(3742)

Tirages dans un jeu de cartes

On tire simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien de tirages différents peut-on obtenir : sans imposer de contraintes sur les cartes.

contenant 5 carreaux ou 5 piques.

2 carreaux et 3 piques.

au moins un roi.

au plus un roi.
2 rois et 3 piques.

Exercice 7

(3743)

Ranger des livres

On souhaite ranger sur une étagère 4 livres de mathématiques (distincts), 6 livres de physique, et 3 de chimie. De combien de façons peut-on effectuer ce rangement :

si les livres doivent être groupés par matières.

si seuls les livres de mathématiques doivent être groupés.

Exercice 8

(3744)

Anagrammes

Dénombrer les anagrammes des mots suivants : MATHS, RIRE, ANANAS.

Exercice 9

(3746)

Grilles de Fleissner

Les grilles tournantes, mises au point par le colonel Fleissner, servirent pour une méthode de cryptographie qui fut utilisée par les allemands lors de la Première Guerre Mondiale. Une telle grille est constituée par un carré de côté 6. On divise ce carré en une grille de 36 petits carrés égaux (tous de côté 1), et on ôte 9 de ces carrés. La propriété suivante doit être vérifiée : les trous que l'on obtient avec la grille en position initiale, avec la grille tournée d'un quart de tour, d'un demi-tour ou de trois quart de tour ne se superposent jamais. Ainsi, les 36 positions peuvent être occupées par un trou après éventuellement une rotation de la grille d'un quart, d'un demi ou de trois-quart de tour.

Combien peut-on fabriquer de telles grilles ?

Pour quelles valeurs de n peut-on fabriquer une grille de Fleissner de côté n ? Combien de telles grilles peut-on alors fabriquer ?

Exercice 10

(3750)

Parties disjointes

Soit E un ensemble à n éléments.

Soit X une partie à p éléments de E . Combien y-a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

Combien y-a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de X ?

Exercice 11

(3755)

Nombre de surjections

On se propose de calculer le nombre $S(n, p)$ de surjections de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$, où $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Des cas particuliers :

Calculer $S(n, p)$ pour $p > n$.

Calculer $S(n, n)$.

Calculer $S(n, 1)$.

Calculer $S(n, 2)$.

Calculer $S(n + 1, n)$.

Démontrer que, pour tout $n > 1$ et tout $p > 1$, on a la relation

$$S(n, p) = p(S(n - 1, p) + S(n - 1, p - 1)).$$

En déduire un algorithme pour calculer $S(n, p)$.

Démontrer que $S(n, p) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.