Corrigé
TD dénombrement 2

Exercice 1
(3736)

Pour écrire un élément de A, on a <ul class="rien">
8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1).
9 choix pour les 6 autres chiffres (tous sauf 1). On a donc $(A) = 8 \times 9^6$.
Pour écrire un élément de A_1, on a <ul class="rien">
8 choix pour le premier chiffre (tous sauf 0 et 1)
Notant E l'ensemble des chiffres différents de 1 et du premier chiffre choisi, le reste de l'écriture de cet élément consiste en un choix de 6 éléments distincts de E. Puisque E comporte 8 élément, on a donc :

$$(A_1) = 8 \times A_8^6 = 8\frac{8!}{2!}.$$

Un élément de A est pair si son chiffre des unités est 0,2,4,6 ou 8. Il y a 5 façons de choisir ce chiffre des unités, 8 façons de choisir le premier chiffre, et 9^5 autres de choisir les autres chiffres. On a donc :

$$(A_2) = 5 \times 8 \times 9^5.$$

Remarquons qu'un élément de A_3 ne comporte pas le chiffre zéro. Il y a $\binom{8}{7}$ façons de choisir 7 chiffres tous distincts parmi $\{2, 3, \dots, 9\}$, et une seule façon, ces 7 chiffres choisis, de les écrire en ordre croissant. On a donc

$$(A_3) = \binom{8}{7}.$$

Exercice 2
(3737)

Pour p parcourant $0, \dots, n$, il y a $\binom{n}{p}$ choix possibles pour Y une partie de E à p éléments. Y étant fixé, X est une partie quelconque de Y, qui compte p éléments, il y a donc 2^p choix pour X. Le nombre recherché est donc égal à

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 2^p = (1+2)^n = 3^n.$$

Exercice 3
(3739)

Ce genre d'exercices se traite très facilement en utilisant un tableau à double entrée dans lequel on inscrit les informations à notre disposition : <div class=equation> <img src=http ://www.bibmath.net/ressources/bde/images/etu

Exercice 4
(3740)

Un triangle est déterminé par 3 droites (ses côtés). Il y a autant de triangles que de possibilités de choisir 3 droites parmi n, c'est-à-dire $\binom{n}{3}$.

Exercice 5

(3741)

Pour le premier, on a 20 choix possibles, pour le second 19, pour le troisième 18. Le nombre de podiums possibles est donc égal à $20 \times 19 \times 18 = 6840$.

L'ordre n'est plus important, et on cherche le nombre de choix de 3 concurrents parmi n, c'est-à-dire $\binom{20}{3} = 1140$.

Exercice 6
(3742)

Il n'y a pas d'ordre et pas de répétition sur les cartes : un tirage est donc une combinaison de 5 cartes parmi 32. Il y a : $\binom{32}{5} = 201376$ tirages différents.

Pour obtenir 5 carreaux, il faut choisir 5 cartes parmi 8 : il y a $\binom{8}{5}$ tels tirages. De même pour obtenir 5 piques. Comme les deux cas sont disjoints, il y a $2 \times \binom{8}{5} = 112$ tels tirages différents.

Il y a $\binom{8}{2}$ façons de choisir 2 carreaux parmi 8 puis, pour chacune de ces façons, il y a $\binom{8}{3}$ façons de choisir 3 piques. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{8}{2} \times \binom{8}{3} = 1568$.

On compte le complémentaire, c'est-à-dire les tirages sans rois : il faut alors choisir 5 cartes parmi 28, il y a $\binom{28}{5}$ tels tirages. Le nombre de tirages recherché est donc : $\binom{32}{5} - \binom{28}{5} = 103096$.

On a déjà compté les tirages sans roi. Pour les tirages comprenant un roi, il y a 4 façons de choisir le roi, puis, pour chacune de ces façons, $\binom{28}{4}$ façons de choisir les autres cartes. On en déduit qu'il y a $\binom{28}{5} + 4\binom{28}{4} = 180180$ tels tirages.

On sépare les tirages contenant le roi de pique et ceux ne contenant pas le roi de pique. <ul class="rien">

si le tirage ne contient pas le roi de pique, il y a $\binom{3}{2}$ choix différents de 2 rois parmi 3, puis $\binom{7}{3}$ choix de 3 piques parmi 7 (tous sauf le roi de pique).

si le tirage contient le roi de pique, il reste 3 choix pour le roi différent du roi de pique, puis $\binom{7}{2}$ choix pour les deux autres piques. Cela faisant, on n'a tiré que 4 cartes. Il reste une carte à choisir qui n'est ni un roi, ni un pique, et donc $32 - (4 + 7) = 21$ choix. Finalement, le nombre de tirages possibles est :

$$3 \times \binom{7}{2} \times 21 + \binom{3}{2} \times \binom{7}{3} = 1428.$$

Exercice 7
(3743)

Il y a 3 ! façons de choisir l'ordre des matières. Une telle façon choisie, il y a 4 ! façons de ranger les livres de mathématiques, 6 ! façons de ranger les livres de physique, et 3 ! façons de ranger les livres de chimie. Le nombre de rangements possible est donc : $3!4!6!3!$.

Il peut y avoir 0,1,...,9 livres placés avant les livres de mathématiques. Il y a donc 10 choix du nombre de livres placés avant le livre de mathématiques. Ce choix fait, il y a 4! façons d'ordonner les livres de mathématiques, et 9! façons d'ordonner les autres : il y a donc en tout $10 \times 4!9!$ rangements différents.

Exercice 8
(3744)
Un anagramme correspond à une permutation des lettres d'un mot. Mais si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot ! On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. On trouve donc : <ul class="rien">

MATHS : 5 !
RIRE : 4 !/2 !
ANANAS : 6 !/(2 !3 !)

Exercice 9
(3746)

On a 36=4*9 choix pour placer le premier trou. On ne peut ensuite plus choisir ni ce carré, ni les 3 carrés obtenus à partir de celui-ci par rotation. Il reste donc 32=4*8 choix pour placer le second trou. On a ensuite 4*7 choix pour placer le troisième trou, et ainsi de suite... jusque 4 choix pour placer le 9ème trou. Mais attention ! Ce faisant, on compte certaines grilles deux fois. En effet, on obtient la même grille si on échange le premier trou et le deuxième trou.... Il faut diviser donc le total obtenu par le nombre de permutations possibles entre les 9 trous, soit 9 ! Finalement, le nombre de grilles possibles est

$$\frac{4\times 9\times 4\times 8\times 4\times 7\times\cdots\times 4\times 1}{9!}=4^9.$$

Si on veut construire une grille de Fleissner, il faut pouvoir réaliser $n^2/4$ trous (pour qu'avec les 4 positions, on puisse obtenir n^2 trous). Ainsi, n doit être pair (et dans ce cas, n^2 est bien un multiple de 4). Ensuite, on procède comme dans le cas précédent : on a $n^2=4\times\frac{n^2}{4}$ choix pour le premier carré, $n^2-4=4\times\left(\frac{n^2}{4}-1\right)$ choix pour le deuxième carré,... En n'oubliant pas de diviser par la factorielle de $\frac{n^2}{4}$, on obtient que le nombre de grilles est $4^{n^2/4}$.

Exercice 10
(3750)

Y est une partie quelconque de $E\backslash X$ qui compte $n-p$ éléments. Il y a donc 2^{n-p} choix pour Y.

On choisit d'abord p le nombre d'éléments de X. Ce nombre étant fixé, il y a $\binom{n}{p}$ choix pour X. X étant fixé, il y a 2^{n-p} choix pour Y d'après la question précédente. Le nombre recherché est donc

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}=(1+2)^n=3^n.$$

Exercice 11
(3755)

Si $p>n$, il n'y a pas de surjection de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,p\}$. On a donc $S(n,p)=0$.

Lorsque $p=n$, les surjections de $\{1,\dots,n\}$ sur $\{1,\dots,n\}$ sont les bijections de $\{1,\dots,n\}$ sur lui-même. Il y en a donc $n!=S(n,n)$.

Lorsque $p = 1$, toute application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1\}$ est une surjection. Mais il y a une seule application de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1\}$. On a donc $S(n, 1) = 1$.

Lorsque $p = 2$, il y a deux applications qui ne sont pas surjectives : celle qui envoie tous les éléments sur 1 et celle qui envoie tous les éléments sur 2. De plus, il y a 2^n applications de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, 2\}$. On en déduit que $S(n, 2) = 2^n - 2$.

Lorsque l'on étudie les surjections de $\{1, \dots, n+1\}$ dans $\{1, \dots, n\}$, un unique élément de l'ensemble d'arrivée a deux antécédents, et tous les autres en ont un seul. On peut donc caractériser une surjection par le choix de cet élément et de ses deux antécédents, puis par une bijection entre les $n-1$ autres éléments. On a donc

$$S(n+1, n) = n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Soit s une surjection de $\{1, \dots, n\}$ sur $\{1, \dots, p\}$. Il y a p façons de choisir la valeur de $s(n)$. Une fois cette valeur choisie, notons s' la restriction de s à $\{1, \dots, n-1\}$. Remarquons que tous les éléments de $\{1, \dots, p\} \backslash \{i\}$ sont atteints par s'. On distingue alors deux cas : <ul class="rien">

Soit i est atteint par s', et alors s' est une surjection de $\{1, \dots, n-1\}$ sur $\{1, \dots, p\}$. Il y a $S(n-1, p)$ possibilités ;

Soit i n'est pas atteint par s', et s' est une surjection de $\{1, \dots, n-1\}$ sur $\{1, \dots, p\} \backslash \{i\}$. Il y a $S(n-1, p-1)$ possibilités. Finalement, on obtient que

$$S(n, p) = p\big(S(n-1, p) + S(n-1, p-1)\big).$$

On programme la fonction suivante S, d'arguments n et p deux entiers naturels non nuls. <div class=citation> Fonction S(n,p) <div class=citation> Si p>n, retourner 0.
 Si p=1, retourner 1.
 Sinon, retourner p(S(n-1,p-1)+S(n-1,p))